
Vektörler İle Tanımlanan İşlemler

Yazar

Yrd.Doç.Dr. Nevin MAHİR

ÜNİTE

4

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- iki vektörün skaler çarpımı ve skaler çarpımın özelliklerini öğrenecek ve geometrik yorumlar yapabilecek,
- vektörel çarpım ile karma çarpım ve bunların özelliklerini kavrayacak, geometrik yorumlar yapabileceksiniz.

İçindekiler

- İki Vektörün Skaler Çarpımı 65
 - Skaler Çarpımın Özellikleri 65
 - Skaler Çarpımla İlgili Sonuçlar 67
 - İki Vektörün Vektörel Çarpımı 72
 - Vektörel Çarpımın Özellikleri 74
 - Karma Çarpım 76
 - Karma Çarpımın Özellikleri 77
 - Çözümlü Problemler 79
 - Değerlendirme Soruları 84
-

Çalıřma Önerileri

- Bu üniteyi kavrayabilmek için determinant fonksiyonu ve özelliklerini hatırlayınız.

1. İki Vektörün Skaler Çarpımı

Uzayda, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ gibi iki vektörün skaler çarpımı

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre, iki vektörün skaler çarpımında bir gerçel sayı elde edilir.

1.1. Örnek

$\vec{a} = (-2, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, 7, 5)$ vektörlerinin skaler çarpımını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (-2, -1, 0) \cdot (1, 7, 5) \\ &= -2 \cdot 1 + (-1) \cdot 7 + 0 \cdot 5 \\ &= -2 - 7 + 0 \\ &= -9 \end{aligned}$$

2. Skaler Çarpımının Özellikleri

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Değişme Özelliği)
2. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ (Pozitif tanımlılık)
 $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
3. $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ $k \in \mathbf{R}$
4. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (Dağılma Özelliği)

Bu özellikleri skaler çarpımın tanımını kullanarak kolayca gösterebiliriz.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ reel sayılarda çarpma işleminin değişme özelliği kullanılarak,
 $\vec{b} \cdot \vec{a}$

bulunur.

$$\begin{aligned}
2. \quad \vec{a} \cdot \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) \\
&= a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 \\
&= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2
\end{aligned}$$

a_1, a_2, a_3 gerçel sayılar olduklarından

$a_1^2 \geq 0$, $a_2^2 \geq 0$ ve $a_3^2 \geq 0$ dır. Dolayısıyla

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \text{ bulunur}$$

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$ olduğundan

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = (0, 0, 0) = \vec{0} \text{ dır}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad k(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= k[(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)] \\
&= k(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\
&= k(a_1 b_1) + k(a_2 b_2) + k(a_3 b_3)
\end{aligned}$$

Reel sayılarda çarpma işleminin birleşme özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&= (k a_1) b_1 + (k a_2) b_2 + (k a_3) b_3 \\
&= (k a_1, k a_2, k a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\
&= k(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\
&= (k \vec{a}) \cdot \vec{b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot [(b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3)] \\
&= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \\
&= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\
&= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 \\
&= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\
&= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

3. Skaler Çarpımla İlgili Sonuçlar

1. Bir \vec{a} vektörünün normu;

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3)} \\ &= \sqrt{a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \end{aligned}$$

şeklinde, skaler çarpımla da tanımlanır.

2. \vec{a} ve \vec{b} gibi iki vektör arasındaki küçük açı θ ise

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

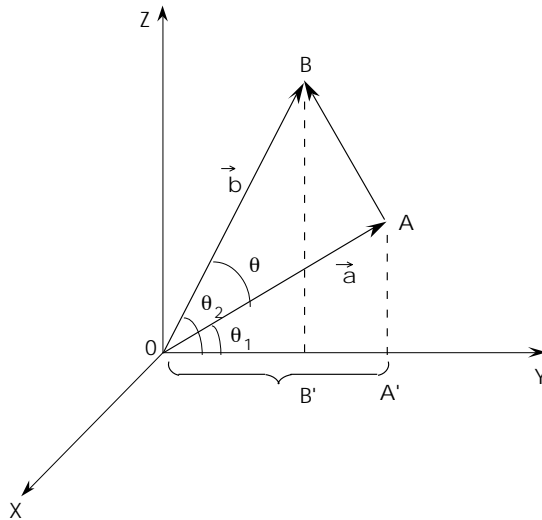
ve

$$0 \leq \theta < \pi \text{ olduğundur}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

dır.

Şekil 4.1. den



Şekil 4.1:

$$\vec{a} + \vec{AB} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{AB}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{|\vec{OA}'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{OA}'| = |\vec{a}| \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 &= \frac{|\vec{AA}'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{AA}'| = |\vec{a}| \sin\theta_1 \end{aligned} \right\} A = (|\vec{a}| \cos\theta_1, |\vec{a}| \sin\theta_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta_2 &= \frac{|\vec{OB}'|}{|\vec{b}|} \Rightarrow |\vec{OB}'| = |\vec{b}| \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 &= \frac{|\vec{BB}'|}{|\vec{b}|} \Rightarrow |\vec{BB}'| = |\vec{b}| \sin\theta_2 \end{aligned} \right\} B = (|\vec{b}| \cos\theta_2, |\vec{b}| \sin\theta_2)$$

yazabiliriz.

$$|\vec{AB}|^2 = (|\vec{b}| \cos\theta_2 - |\vec{a}| \cos\theta_1)^2 + (|\vec{b}| \sin\theta_2 - |\vec{a}| \sin\theta_1)^2$$

Gerekli işlemler yapılarak

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\theta_2 - \theta_1) + |\vec{a}|^2 \dots\dots\dots (1)$$

bulunur.

$\theta_2 - \theta_1 = \theta$ olsun.

$|\vec{AB}| = \vec{b} - \vec{a}$ dan

$$\begin{aligned} |\vec{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

(1) ve (2) den

$$\begin{aligned} |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta + |\vec{a}|^2 &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Bu formülden iki vektör arasındaki açının kosinüsü,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

dır.

Diğer taraftan $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ olduğundan

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos\theta|$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta \text{ ifadesinden}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

dır. Buna göre,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

dır.

3.1. Örnek

$$\vec{a} = (2, 1, 3) \text{ ve } \vec{b} = (0, 4, -1)$$

vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (2, 1, 3) \cdot (0, 4, -1) \\ &= 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

Bu değerler

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta \text{ ifadesinde yerine yazılırsa}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{31}}$$

olur.

Dik Vektörler

İki vektör arasındaki açı $\pi/2$ ise bu vektörler birbirine diktir denir ve $\vec{a} \perp \vec{b}$ şeklinde gösterilir. Sıfırdan farklı \vec{a} ve \vec{b} vektörleri için

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ ise } \vec{a} \perp \vec{b}$$

dir. Gerçekten,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \quad |\vec{a}| \neq 0 \quad \text{ve} \quad |\vec{b}| \neq 0 \text{ olduğunda}$$

$$\cos \theta = 0 \text{ dır. Dolayısıyla } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ dir.}$$

Tersine, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

dır. O halde,

$$\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0 \text{ olmak üzere}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

dir.

Özel olarak, $\vec{0}$ vektörü her vektöre diktir.

3.2. Örnek

$$\vec{a} = (1, 2, 4), \vec{b} = (2, -5, 3), \vec{c} = (2, -1, 0)$$

vektörlerinin birbirlerine dik olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (1, 2, 4) \cdot (2, -5, 3) \\ &= 1 \cdot 2 + (25) + 4 \cdot 3 \\ &= 2 - 10 + 12 \\ &= 4 \neq 0 \end{aligned}$$

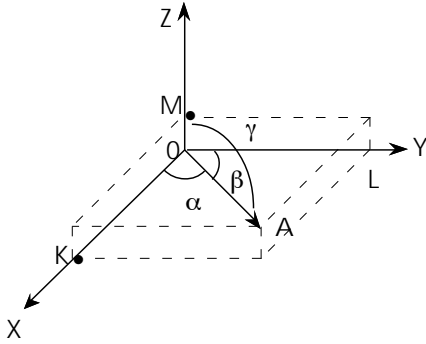
olduğundan, \vec{a} vektörü \vec{b} vektörüne dik değildir.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{c} &= (1, 2, 4) \cdot (2, -1, 0) \\ &= 2 - 2 \\ &= 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= (2, -5, 3) \cdot (2, -1, 0) \\ &= 4 + 10 \\ &= 14 \neq 0 \text{ olduğundan } \vec{b} \text{ vektörü } \vec{c} \text{ ye dik değildir.}\end{aligned}$$

Vektörlerin Doğrultu Açıları ve Doğrultman Kosinüsleri

Herhangi bir $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektörünü alalım.



Şekil 4.2:

\vec{a} vektörünün uzunluğu $r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ve koordinat eksenleriyle pozitif yönde yaptığı açılar sırasıyla α, β, γ olsun. Bu açılara \vec{a} vektörünün doğrultu açıları denir. Şekil 4.2 ye göre

- α açısı KOA açısı
- β açısı LOA açısı
- γ açısı MOA açısı

dır. \vec{a} nın doğrultman kosinüsleri adı verilen doğrultu açılarının kosinüsleri, \vec{a} ile $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörlerinin skaler çarpımından bulunabilir.

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_1 = |\vec{a}| |\vec{e}_1| \cos \alpha$$

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (1, 0, 0) = |\vec{a}| \cos \alpha$$

$$a_1 = |\vec{a}| \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{r}$$

Benzer olarak,

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_2 = |\vec{a}| |\vec{e}_2| \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{a_2}{r}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_3 = |\vec{a}| |\vec{e}_3| \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{a_3}{r}$$

elde edilir. \vec{a} vektörünün doğrultu kosinüslerinin karelerinin toplamı ise,

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{a_1^2}{r^2} + \frac{a_2^2}{r^2} + \frac{a_3^2}{r^2} \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{r^2} \\ &= \frac{r^2}{r^2} = 1 \end{aligned}$$

dir.

3.3. Örnek

$\vec{a} = (4, 5, -3)$ vektörünün doğrultu kosinüslerini bulun

Çözüm

$$\vec{a} \text{ vektörünün uzunluğu } |\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-3)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{r} = \frac{4}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos \beta = \frac{a_2}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{r} = \frac{-3}{5\sqrt{2}}$$

4. İki Vektörün Vektörel Çarpımı

Uzayda $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ gibi iki vektörün vektörel çarpımı;

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre, iki vektörün vektörel çarpımının sonucunda başka bir vektör elde edilir. İki vektörün vektörel çarpımı determinant yardımıyla da,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde verilebilir. Bu tanıma göre, \vec{a} ve \vec{b} vektörlerinin vektörel çarpımını bulmanın kolay yolu; önce, \vec{a} ve \vec{b} vektörlerinin bileşenleri ile

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris oluşturulur. Sonra, bu matrisin sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü sütunları atılarak,

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

determinantları bulunur. Bu determinantlar $\vec{a} \times \vec{b}$ bileşenlerini oluşturur.

4.1. Örnek

$$\vec{u} = (2, -1, 4) \text{ ve } \vec{v} = (1, 3, 0) \text{ ise}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-12, 4, 7)$$

dir.

Herhangi bir \vec{a} vektörünün, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri ile,

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

şeklinde yazılabildiğini görmüştük. Buna göre, \vec{a} ve \vec{b} vektörlerinin vektörel çarpımı olan

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

vektörü de

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

şeklinde gösterilebilir. Bu ifade de (biçimsel olarak)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

determinantına eşittir. Böylece $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörü bu determinant yardımıyla da bulunabilir.

4.2. Örnek

$\vec{a} = (2, -1, 4)$ ve $\vec{b} = (1, 3, 0)$ vektörlerinin vektörel çarpımını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_1(-1 \cdot 0 - 4 \cdot 3) - \vec{e}_2(2 \cdot 0 - 4 \cdot 1) + \vec{e}_3(2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1) \\ &= -12\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 \\ &= (-12, 4, 7) \end{aligned}$$

5. Vektörel Çarpımın Özellikleri

1. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$
4. $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) \quad k \in \mathbb{R}$
5. $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörü hem \vec{a} , hem de \vec{b} ye diktir.
6. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$
7. $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
8. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$, burada θ , \vec{a} ile \vec{b} arasındaki küçük açıdır.

İlk dört özelliği determinant özelliklerini kullanarak kolayca ispatlayabiliriz. Yedinci ve sekizinci özelliklerin ispatını karma çarpımdan sonra vereceğiz.

$$\begin{aligned}
1. \quad \vec{a} \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_1(a_2 a_3 - a_2 a_3) - \vec{e}_2(a_1 a_3 - a_1 a_3) + \vec{e}_3(a_1 a_2 - a_1 a_2) \\
&= 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = (0, 0, 0) = \vec{0}
\end{aligned}$$

$$2. \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})
\end{aligned}$$

$$4. \quad (k\vec{a}) \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = k(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\begin{aligned}
5. \quad \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_2 a_1 b_3 + a_3 a_1 b_2 - a_3 a_2 b_1 = 0
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, \vec{a} ile $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörünün skaler çarpımı sıfır olduğundan, $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörü \vec{a} vektörüne diktir. Benzer olarak, $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ olduğu ve böylece $\vec{a} \times \vec{b}$ nin \vec{b} vektörüne dik olduğu gösterilmiş olur.

$$\begin{aligned}
6. \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= [(a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3] \times \vec{c} \\
&= [(a_3 b_1 - a_1 b_3)c_3 - (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_2]\vec{e}_1 \\
&= [(a_1 b_2 - a_2 b_1)c_1 - (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_3]\vec{e}_2 \\
&= [(a_2 b_3 - a_3 b_2)c_2 - (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_1]\vec{e}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(a_3 c_3 + a_2 c_2) b_1 - (b_3 c_3 + b_2 c_2) a_1] \vec{e}_1 \\ & [(a_1 c_1 + a_3 c_3) b_2 - (b_1 c_1 + b_3 c_3) a_2] \vec{e}_2 \\ & [(a_2 c_2 + a_1 c_1) c_3 - (b_2 c_2 + b_1 c_1) a_3] \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Köşeli parantezlerin içlerine, sırasıyla $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ terimlerini ekleyip çıkarırsak, gerekli işlemlerden sonra,

$$= [(\vec{a} \cdot \vec{c}) b_1 - (\vec{b} \cdot \vec{c}) a_1] \vec{e}_1 + [(\vec{a} \cdot \vec{c}) b_2 - (\vec{b} \cdot \vec{c}) a_2] \vec{e}_2 + [(\vec{a} \cdot \vec{c}) b_3 - (\vec{b} \cdot \vec{c}) a_3] \vec{e}_3$$

elde ederiz. Böylece

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

olur.

6. Karma Çarpım

Uzayda herhangi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri verilsin \vec{a} vektörü ile $\vec{b} \times \vec{c}$ vektörünün skaler çarpımı olan, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ gerçel sayıya $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin karma çarpımı denir. Bu üç vektörün karma çarpımı $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ile gösterilir ve

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde, determinant yardımıyla hesaplanır.

6.1. Örnek

$$\vec{a} = (0, 4, 5) \quad \vec{b} = (-1, 2, 3) \quad \vec{c} = (2, 0, -2)$$

vektörlerinin karma çarpımını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (4 \cdot (-1) \cdot (-2) - 6) + 5 \cdot (-4) \\ &= 16 - 20 = -4 \end{aligned}$$

7. Karma Çarpımın Özellikleri

$$1. (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

Determinant özellikleri kullanılarak kolayca gösterilebilir.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ (-)(-) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$$

Benzer olarak, $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ gösterilebilir. İkinci determinanta bakacak olursak,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

dir.

$$2. (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} + k\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} + l\vec{c}, \vec{c}) \quad k, l \in \mathbf{R}$$

$$3. (k\vec{a}, l\vec{b}, m\vec{c}) = (klm)(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}); \quad k, l, m \in \mathbf{R}$$

$$4. (\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}) = 0$$

$$5. (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$$

vektörel çarpımın özelliklerinde, ispatını sonraya bıraktığımız son iki özelliği göstermek için Lagrange özdeşliğini verelim.

Lagrange Özdeşliği

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

İspat

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = k \text{ olsun.}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = k \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) \quad , \text{ karma çarpımının 7.1. özelliğinden}$$

$(k\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{d}$ dir. Burada k yerine $\vec{a} \times \vec{b}$ yi alarak

$[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] \cdot \vec{d}$ yazabiliriz. Vektörel çarpımın 6. özelliğinden

$[(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}] \cdot \vec{d}$ olur. Skaler çarpımın özelliğini kullanarak,

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$$

Lagrange özdeşliğini ispatlamış oluruz.

Bu özdeşlikte, $\vec{c} = \vec{a}$ ve $\vec{d} = \vec{b}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{a}) \\ |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned}$$

Vektörel çarpımın yedinci özelliği elde edilir.

Ayrıca yedinci özelliğe

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

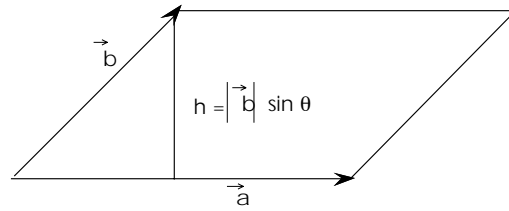
Her iki tarafın karakökü alınarak

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Vektörel çarpımın sekizinci özelliği ispatlanmış olur. Bunun geometrik anlamı $|\vec{a} \times \vec{b}|$ nin \vec{a} ve \vec{b} vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanına eşit olmasıdır.

Yani,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = |\vec{a}| \cdot h$$



Şekil 4.3:

\vec{a} ve \vec{b} sıfırdan farklı iki vektör olsun.

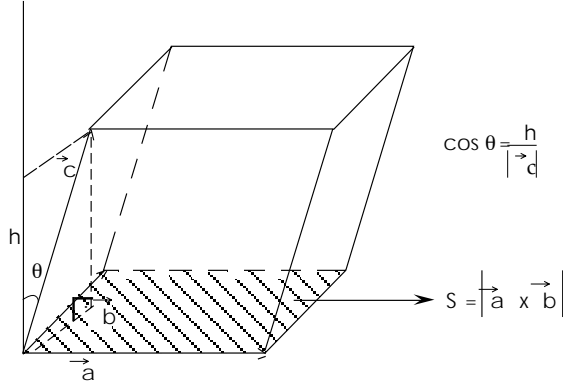
Eğer $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ ise $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0$

$$\Rightarrow \sin \theta = 0 \text{ dan}$$

$$\theta = 0 \text{ veya } \theta = \pi \text{ olur.}$$

Bu da $\vec{a} \parallel \vec{b}$ olduğunu gösterir.

6. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ karma çarpımı, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin üzerine kurulan paralel yüzünün hacmine eşittir.



Şekil 4.4:

Şekil 4.4 de $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{h}$ vektörü \vec{a} ve \vec{b} vektörlerinin belirttiği düzleme diktir ve $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ise, \vec{a} ve \vec{b} vektörlerinin üzerine kurulan paralel kenarın alanına eşittir.

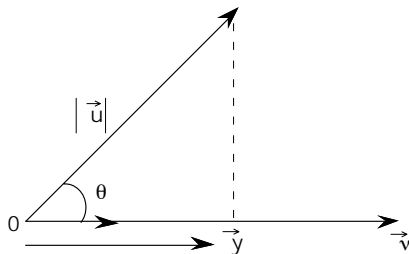
Buna göre,

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \underbrace{|\vec{a} \times \vec{b}|}_{= S} \underbrace{|\vec{c}| \cos \theta} = S \cdot h \end{aligned}$$

8. Çözümlü Problemler

1. $\vec{u} = (1, 5, -3)$ vektörünün $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm



Şekil 4.5:

Şekil 4.5 göre \vec{u} nun \vec{v} üzerindeki dik izdüşümü \vec{y} ve \vec{v} yönündeki birim vektör \vec{v}_0 olsun.

$$\cos\theta = \frac{|\vec{y}|}{|\vec{u}|} \Rightarrow |\vec{y}| = |\vec{u}| \cos\theta$$

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} \quad \text{ve} \quad \vec{y} = \vec{v}_0 \cdot |\vec{y}|$$

$$= |\vec{y}| \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

$$= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$$

$$\vec{y} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

dir.

$$\vec{y} = \frac{(1, 5, -3) \cdot (-2, 3, 1)}{|(-2, 3, 1)|^2} \cdot (-2, 3, 1)$$

$$= \frac{-2 + 15 - 3}{14} \cdot (-2, 3, 1)$$

$$= \frac{10}{14} (-2, 3, 1) = \frac{5}{7} (-2, 3, 1) = \left(-\frac{10}{7}, \frac{15}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

elde edilir.

2. $\vec{u} = (1, 5, -3)$, $\vec{v} = (2, -1, 0)$ vektörlerine dik olan bir vektör bulunuz.

Çözüm

\vec{u} ve \vec{v} vektörlerin dik olan vektör, bu iki vektörün vektörel çarpımı olan vektördür. Yani,

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - 11\vec{e}_3 = (-3, -6, -11)$$

3. $\vec{u}=(3, 0, 1)$, $\vec{v}=(0, -2, 4)$, $\vec{w}=(-5, 4, 1)$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzünün hacmini bulunuz.

Çözüm

Paralelyüzlüyü oluşturan üç vektörün karma çarpımı, bu paralelyüzlünün hacmine eşittir. O halde,

$$\vec{V}=(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = |-64| = 64br^3$$

4. $\vec{u}=(2, 1, 3)$, $\vec{v}=(-1, 0, 5)$ vektörlerinin vektörel çarpımını ve bu vektörler üzerine kurulan paralelkenarın alanını bulunuz. Bu iki vektör arasındaki θ açısını hesaplayınız.

Çözüm

Paralelkenarı oluşturan iki vektörün vektörel çarpımının normu bu paralelkenarın alanına eşittir.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5\vec{e}_1 - 13\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (5, -13, 1)$$

$$S = |\vec{u} \times \vec{v}| = |(5, -13, 1)| = \sqrt{195} \text{ br}^2$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$$

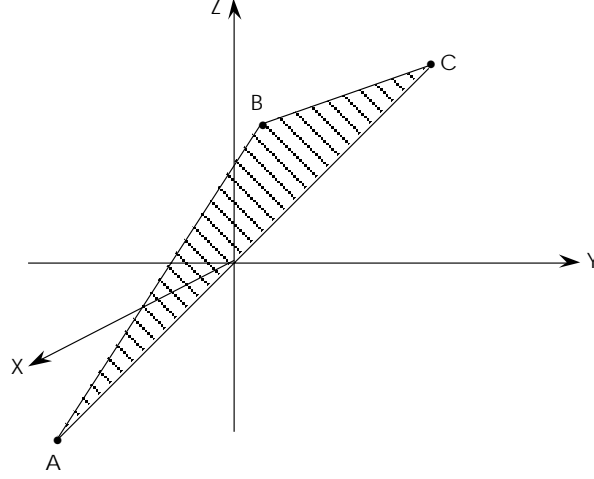
formülünden,

$$\sin \theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{195}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{14}}$$

$$\theta = \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{14}} \quad \text{elde edilir.}$$

5. Köşeleri $A=(4, 0, -1)$, $B=(1, 1, 2)$ ve $C=(-2, 1, 2)$ olan bir üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm



Şekil 4.6:

Şekil 4.6 dan \vec{AB} ve \vec{AC} vektörlerinin üzerine kurulan üçgenin alanı,

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

dir. Buna göre,

$$\vec{AB} = (1 - 4, 1 - 0, 2 - (-1)) = (-3, 1, 3)$$

$$\vec{AC} = (-2 - 4, 1 - 0, 3 - (-1)) = (-6, 1, 4)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (1, -6, 3)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(1, -6, 3)|$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 + 36 + 9}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{46} \text{ br}^2$$

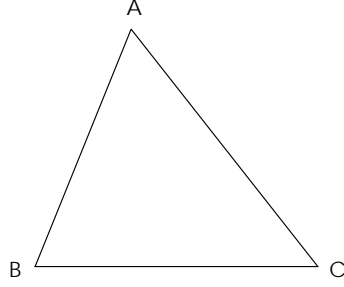
bulunur.

6. Bir ABC üçgeninde

$$\frac{\sin A}{|\vec{BC}|} = \frac{\sin B}{|\vec{AC}|} = \frac{\sin C}{|\vec{AB}|}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm



Şekil 4.7:

ABC üçgeninde,

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

dır. Bunu sırasıyla \vec{CA} , \vec{BC} ve \vec{AB} vektörleri ile vektörel çarpalım.

$$\vec{AB} \times \vec{CA} + \vec{BC} \times \vec{CA} + \vec{CA} \times \vec{CA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{CA} + \vec{BC} \times \vec{CA} = \vec{0} \dots (1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} + \vec{BC} \times \vec{BC} + \vec{CA} \times \vec{BC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{BC} + \vec{CA} \times \vec{BC} = \vec{0} \dots (2)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AB} + \vec{BC} \times \vec{AB} + \vec{CA} \times \vec{AB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{BC} \times \vec{AB} + \vec{CA} \times \vec{AB} = \vec{0} \dots (3)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \times \vec{CA} \stackrel{(1)}{=} -\vec{BC} \times \vec{CA} \stackrel{(2)}{=} \vec{AB} \times \vec{BC}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{CA}| = |-\vec{BC} \times \vec{CA}| = |\vec{AB} \times \vec{BC}|$$

$$\Rightarrow |\vec{AB}| |\vec{CA}| \sin A = |\vec{BC}| |\vec{CA}| \sin C = |\vec{AB}| |\vec{BC}| \sin B$$

Buradan üç eşitliği $|\vec{AB}| |\vec{CA}| |\vec{BC}|$ ile bölersek

$$\frac{\sin A}{|\vec{BC}|} = \frac{\sin C}{|\vec{AB}|} = \frac{\sin B}{|\vec{AC}|}$$

elde ederiz.

Değerlendirme Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1. $\vec{u} = (-3, -6, -11)$ vektörü aşağıdaki vektörlerden hangisine diktir?
 - A. $(3, 6, 11)$
 - B. $(0, -2, 1)$
 - C. $(8, 0, 2)$
 - D. $(2, -1, 0)$
 - E. $(0, -4, 2)$

2. $\vec{u} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{v} = \left(\sqrt{2}, 0, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ vektörleri arasındaki açı nedir?
 - A. π
 - B. $\frac{\pi}{6}$
 - C. $\frac{\pi}{3}$
 - D. $\frac{\pi}{2}$
 - E. $\frac{\pi}{4}$

3. $\vec{u} = (0, -3, 3)$ ve $\vec{v} = (-1, -4, -1)$ vektörlerinin her ikisine de dik olan vektör aşağıdakilerden hangisidir?
 - A. $(3, 0, 0)$
 - B. $(15, -3, -3)$
 - C. $(4, 1, 0)$
 - D. $(9, 3, 0)$
 - E. $(9, -3, 3)$

4. $\vec{u} = (x, -2, 4)$ ve $\vec{v} = (-6, x, 1)$ vektörleri veriliyor. \vec{u} ile \vec{v} nin skaler çarpımı 28 ise x değeri nedir?
 - A. 1
 - B. 2
 - C. 3
 - D. -2
 - E. -3

5. $\vec{u}=(1, 4, 0)$ vektörünün $\vec{v} = (-2, 1, 1)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$

C. $\left(-\frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

D. $\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, 0\right)$

E. $\left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1\right)$

6. $\vec{u}=(2, 0, 3)$ ve $\vec{v} = (1, -4, 4)$ $\vec{w} = (-1, -2, -3)$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzün hacmi kaç birim küptür?

A. 58

B. 45

C. 35

D. 25

E. 22

7. $\vec{a} = (1, -2, 3)$ ve $\vec{b} = (1, 0, 2)$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı kaç birim karedir?

A. 4

B. 5

C. $\sqrt{7}$

D. $\sqrt{21}$

E. $\sqrt{30}$

8. Köşeleri $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, -1, 0)$ ve $C = (0, 0, 5)$ olan bir üçgenin alanı kaç birim karedir?

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

E. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

9. $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=4$, $\vec{a} \cdot \vec{b}=5$ ise $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-6\vec{a} + 2\vec{b})$ çarpımının sonucu nedir?
A. 5
B. 10
C. -8
D. -6
E. 0
10. $\vec{u}=(3, -4, -4)$, $\vec{v}=(x, -1, 1)$ $\vec{w}=(1, -3, -5)$ vektörlerinin aynı düzleme paralel olmaları için x ne olmalıdır?
A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D 2. C 3. B 4. E 5. A 6. E 7. D 8. A 9. B 10. C