Vektörler

ÜNİTE 3

Yazar
Yrd.Doç.Dr.Nevin MAHİR

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Düzlemde vektör kavramını öğrenecek,
- İki vektörün eşitliği, toplamı, doğrusal bağımlılığı ile bir vektörün bir gerçel sayı ile çarpımı, doğrultu kosinüsleri, boyu ve birim vektör kavramlarını tanıyacak,
- Uzayda vektör kavramını kavrayacaksınız.

İçindekiler

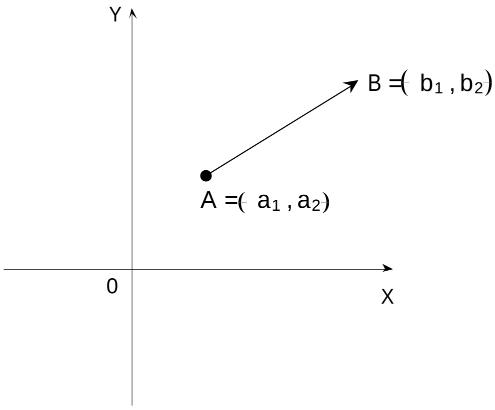
- Vektör Kavramı 41
- İki Vektörün Eşitliği 44
- İki Vektörün Toplamı 44
- Bir Vektörün Bir Gerçel Sayı İle Çarpımı 46
- Bir Vektörün Boyu ve Birim Vektör 48
- İki Vektörün Doğrusal Bağımlılığı 50
- Bir Vektörün Doğrultu Kosinüsleri 51
- Uzayda Vektörler 52
- Çözümlü Problemler 54
- Değerlendirme Soruları 60

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi kavrayabilmek için lisedeki vektörlerle ilgili temel bilgilerinizi gözden geçiriniz.

1. Vektör Kavramı

Uzunluk, alan ve hacim gibi büyüklüklerin yanlızca bir gerçel sayı ile belirtilmelerine karşın, özellikle fizikten gelen ivme, hız, kuvvet gibi nicelikleri belirlemek için bir gerçel sayı yeterli değildir. İkinci türden niceliklerin bir yönü, doğrultusu, büyüklüğü ve uygulama noktası vardır. Bu büyüklükler için yönlendirilmiş doğru parçaları kullanılır. A ve B düzlemde iki nokta olsun. Başlangıç noktası A ve uç noktası B olan $\overrightarrow{AB}$ şeklinde göstereceğimiz yönlü doğru parçalarını gözönüne alalım.



Şekil 3.1

Düzlemde alınan iki nokta, $A = (a_1 , a_2)$ ve $B = (b_1 , b_2)$ koordinatları ile temsil edilirse $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasına karşılık $(b_1 - a_1 , b_2 - a_2)$ sıralı ikilisini karşılık getirebiliriz. Sizinde fark edeceğiniz gibi bu eşleme (yönlü doğru parçalarından düzleme) 1 - 1 (birebir) değildir.

Örneğin, $A = (1 , 1)$ $B = (0 , 0)$ ve $P = (2 , 2)$, $Q = (3 , 3)$ olmak üzere $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{QP}$ yönlü doğru parçalarının her ikiside aynı sıralı ikili ile temsil edilirler.

Düzlemde bu **V** yönlü doğru parçalar kümesinde eğer hesap yapabilmek istiyorsak, bu **V** yi 1-1 ve örten olacak şekilde düzlemde bir koordinat sistemi ile ilintilendirmeniz gerektiğini farketmişsinizdir. Şimdi yukarıdaki eşlemeyi 1-1 yapacak şekilde **V** yönlü doğru parçaları kümesi üzerinde bir denklik oluşturalım, öyleki bir denk yönlü doğru parçaları kümesine bir ve yanlız bir sıralı ikili karşılık gelsin. Düzlemde, $R = (r_1 , r_2)$, $S = (s_1 , s_2)$, $P = (p_1 , p_2)$ ve $Q = (q_1 , q_2)$ noktaları ile, $\overrightarrow{RS}$ ve $\overrightarrow{PQ}$ yönlü doğru parçaları için eğer,

$$q_1 - p_1 = s_1 - r_1 \quad \text{ve} \quad q_2 - p_2 = s_2 - r_2$$

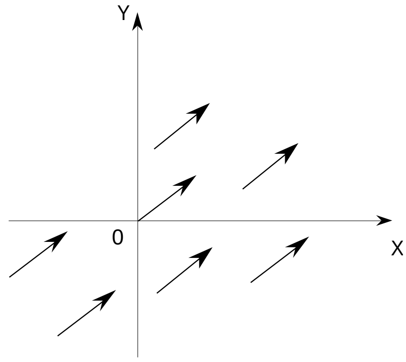
ise bu iki yönlü doğru parçası denktir diyelim. Bu bağıntı,

$\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{PQ}$ (yansıma)

$\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{RS} \Rightarrow \overrightarrow{RS} \cong \overrightarrow{PQ}$ (simetri)

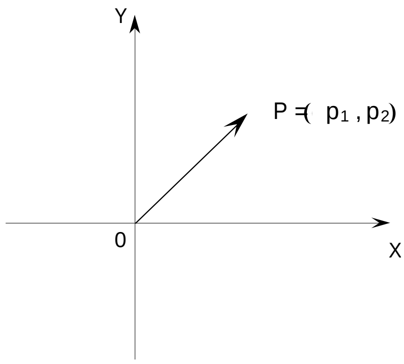
$\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{RS}$ ve $\overrightarrow{RS} \cong \overrightarrow{YZ} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{YZ}$ (geçişme)

özelliklerini sağladığından bir denklik bağıntısıdır. Geometrik olarak, $\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{RS}$ yönlü doğru parçalarının denk olması, düzlemde bunlardan birisi, diğerine paralel kaydırılarak, başlangıç ve bitim noktalarının çakıştırılması anlamına gelir. Bu denklik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıflarının herbirine düzlemde bir vektör diyelim.



Şekil 3.2

$(q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ sıralı ikilisine $\overrightarrow{PQ}$ vektörünün koordinatları denir. Düzlemde P $= (p_1, p_2)$ noktasını alalım. Şekil 3.3 de görüldüğü gibi bu noktayı başlangıç noktasıyla birleştirecek olursak, başlangıç noktası 0, bitim noktası P olan bir yönlü doğru parçası elde ederiz. $\overrightarrow{OP}$ şeklinde göstereceğimiz, bu yönlü doğru parçasına, P noktasının yer vektörü denir. Düzlemde başlangıç noktası 0 olan tüm vektörler, birer yer vektörleridir. Yer vektörleri bitim noktalarıyla temsil edilerek, düzlemdeki noktalarla birebir örten biçimde eşlenebilir. Böylece, düzlemdeki her yer vektörüne bir nokta karşılık getirilmiş olur.



Şekil 3.3

Bu kuruluşa göre düzleme bazen yer vektörlerinin kümesi bazen de sıralı ikililerin kümesi olarak bakabiliriz.

1.1. Örnek

$P = (2 , -1)$ ve $Q = (1 , 3)$ noktaları veriliyor. $\overrightarrow{PQ}$ yönlü doğru parçasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (q_1 - p_1 \ , \ q_2 - p_2)\\ &= (1 - 2 \ , \ 3 - (-1)\ )\\ &= (-1 , 4)\end{aligned}$$

1.2. Örnek

$P = (-1 , 2)$, $R = (4 , 0)$ ve $S = (6 , 2)$ noktaları veriliyor. $\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{RS}$ yönlü doğru parçaları aynı vektörü temsil edebilmeleri için Q noktasını bulunuz.

Çözüm

$Q = (q_1 , q_2)$ olsun.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (q_1 - p_1 \ , \ q_2 - p_2) &&= (q_1 - (-1) \ , \ q_2 - 2)\\ & &&= (q_1 + 1 \ , \ q_2 - 2)\\ \overrightarrow{RS} &= (s_1 - r_1 \ , \ s_2 - r_2) &&= (6 - 4 \ , \ 2 - 0)\\ & &&= (2 , 2)\end{aligned}$$

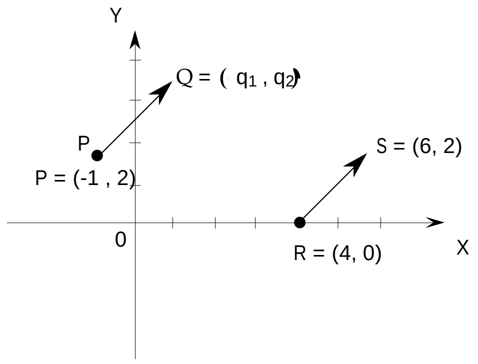
$\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{RS}$ yönlü doğru parçalarının aynı vektörü temsil edebilmeleri için

$$q_1 + 1 = 2 \quad \text{ve} \quad q_2 - 2 = 2$$

eşitliklerinden,

$$q_1 = 1 \quad \text{ve} \quad q_2 = 4$$

bulunur.



Şekil 3.4

2. İki Vektörün Eşitliği

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2)$ vektörleri verilsin.

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} (a_1, a_2) &= (b_1, b_2) \\ a_1 &= b_1 \\ a_2 &= b_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Yani iki vektörün eşit olması için gerek ve yeter koşul bu iki vektörün karşılıklı bileşenlerin eşit olmasıdır.

2.1. Örnek

$\vec{a} = (2, -1)$ ve $\vec{b} = (2, k)$ vektörlerinin eşit olması için k ne olmalıdır?

Çözüm

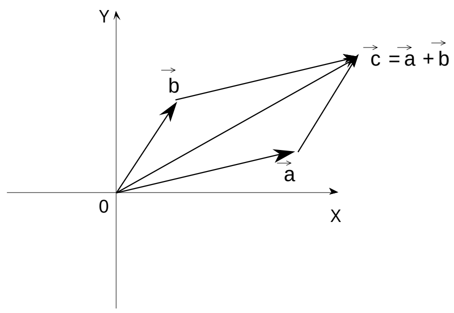
$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} (2, -1) &= (2, k) \\ k &= -1 \end{aligned}$$

3. İki Vektörün Toplamı

Doğrultuları aynı olmayan $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin toplamı:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

şeklinde tanımlanır. Yani, iki vektörün toplamı, bu iki vektörün karşılıklı koordinatlarının toplanmasıyla elde edilir. Geometrik olarak, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektörün toplamı Şekil 3.5 deki gibi paralel kenar kuralı ile yorumlanabilir.



Şekil 3.5

$\vec{a}$, $\vec{b}$ yer vektörleri ile 0 noktasının belirlediği paralel kenarın dördüncü köşesine c diyelim. Buna göre,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

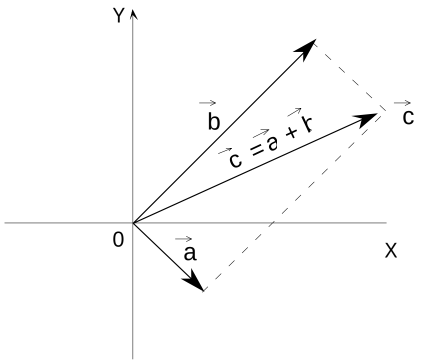
dir. $\vec{c}$ vektörü paralel kenarın köşegenidir.

3.1. Örnek

$\vec{a} = (1\,,\,-2)$ ve $\vec{b} = (4\,,\,5)$ vektörleri veriliyor. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ vektörünü bulunu.

Çözüm

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} \\ &= (1\,,\,-2) + (4\,,\,5) \\ &= (1+4\,,\,-2+5) \\ &= (5\,,\,3) \end{aligned}$$



Şekil 3.6

Vektörlerde Toplama İşleminin Özellikleri

$\vec{a}\,,\,\vec{b}$ ve $\vec{c}$ düzlemde vektörler olsun.

$\vec{0}$, sıfır vektörünü göstermek üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. Birleşme Özelliği:

   Her $\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}$ vektörleri için, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

2. Değişme Özelliği:

   Her $\vec{a}\,,\,\vec{b}$ vektörleri için, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

3. Birim eleman vardır.

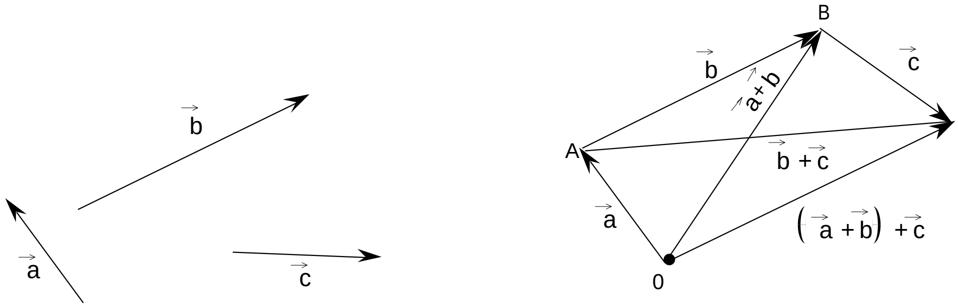
   Her $\vec{a}$ vektörü için, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ olacak şekilde $\vec{0}$ vardır.

4. Ters eleman vardır.

   Her $\vec{a}$ vektörü için, $\vec{a} + \left(\overrightarrow{-a}\right) = \left(\overrightarrow{-a}\right) + \vec{a} = \vec{0}$

olacak şekilde $\overrightarrow{-a}$ vektörü vardır.

Bu özelliklerden sadece birleşme özelliğini ispatlayıp diğerlerini okuyucuya bırakacağız.



Şekil 3.7

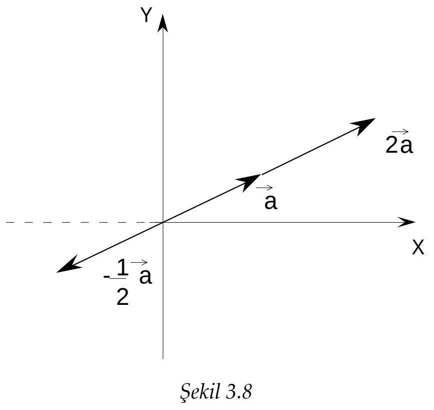
$$
\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} &= [(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] + (c_1, c_2) \\
&= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) \\
&= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2) \\
&= (a_1 + (b_1 + c_1), (a_2 + (b_2 + c_2)) \\
&= (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\
&= (a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) \\
&= \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})
\end{aligned}
$$

4. Bir Vektörün Bir Gerçel Sayı İle Çarpımı

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ vektörü ile bir k gerçel sayısı verilsin. $\vec{a}$ vektörünün k gerçel sayısı ile çarpımı

$$k \cdot \vec{a} = (ka_1, ka_2)$$

şeklinde tanımlanır. Yani $k \cdot \vec{a}$ vektörü, $\vec{a}$ vektörünün bütün bileşenlerinin k ile çarpılmasıyla bulunan vektördür. Şekil 3.8'de $\vec{a}$ vektörünün, $k = 2$ ve $k = \frac{1}{2}$ gerçel sayılarıyla çarpımı örnek olarak verildi.



Şekil 3.8

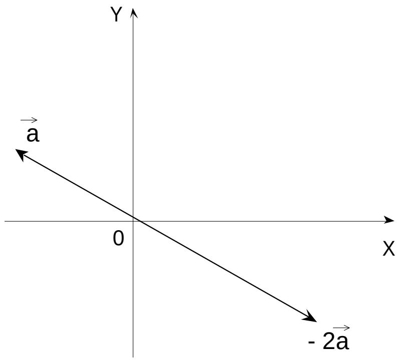
k gerçel sayısının pozitif olması durumunda elde edilen vektörün boyu değişir. Fakat k nın negatif olması durumunda elde edilen vektörün hem boyu, hem de yönü değişir (Şekil 3.8).

4.1. Örnek

$k = -2$ gerçel sayı ve $\vec{a} = (-3,1)$ vektörü veriliyor. $k . \vec{a}$ vektörünü bulunu:

Çözüm

$$k . \vec{a} = -2 (-3 , 1) = (-2 . (-3) , -2 . 1) = (6 , -2)$$



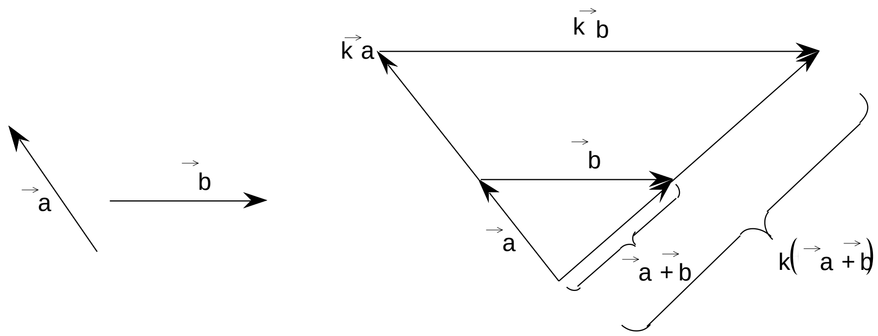
Şekil 3.9

Bir Vektörün Bir Gerçel Sayı İle Çarpımının Özellikleri

$\vec{a}$, $\vec{b}$ düzlemde vektörler olsun. k , l gerçel sayılar olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$
2. $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
3. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
4. $1\vec{a} = \vec{a}$

Bu özelliklerden sadece üçüncü özelliğin hem analitik olarak hem de geometrik olarak göstereceğiz. Diğerlerini okuyucuya bırakacağız.



Şekil 3.10

$$
\begin{aligned}
k(\vec{a}+\vec{b}) &= k\,((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) = k\,(a_1 + b_1, a_2 + b_2)\\
&= (k\,(a_1 + b_1), k\,(a_2 + b_2)) = (ka_1 + kb_2, ka_2 + kb_2)\\
&= (ka_1, ka_2) + (kb_1, kb_2) = k\,(a_1, a_2) + k\,(b_1, b_2)\\
&= k\vec{a} + k\vec{b}
\end{aligned}
$$

5. Bir Vektörün Boyu ve Birim Vektör

Düzlemde $R = (r_1, r_2)$ ve $S = (s_1, s_2)$ noktaları verilsin. Başlangıç noktası R ve bitim noktası S olan $\overrightarrow{RS}$ vektörünün boyu diye bu iki nokta arasında kalan uzaklığa diyeceğiz. Vektörün boyu deyimi yerine, vektörün normu, uzunluğu, büyüklüğü kelimeleri de kullanılır ve $\left|\overrightarrow{RS}\right|$ şeklinde göstereceğimiz $\overrightarrow{RS}$ vektörünün boyu,

$$\left|\overrightarrow{RS}\right| = \sqrt{(s_1 - r_1)^2 + (s_2 - r_2)^2}$$

formülüyle verilir. Özel olarak bir $R = (r_1, r_2)$ yer vektörünün boyu ise,

$$\left|\overrightarrow{OR}\right| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

dir. Boyu sıfır olan bir vektöre sıfır vektörü denir $\vec{O} = (0, 0)$ şeklinde gösterilir. $\left|\vec{a}\right| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ dır.

5.1. Örnek

$A = (-2, 0)$ $B = (4, 8)$ ise $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ vektörünün uzunluğunu bulur

Çözüm

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB}\right| &= \sqrt{(4-(-2))^2 + (8-0)^2}\\
&= \sqrt{(4+2)^2 + 64}\\
&= \sqrt{36 + 64}\\
&= \sqrt{100} = 10 \text{ birim}
\end{aligned}
$$

Uzunluğu 1 birim olan vektöre birim vektör denir. Yani $|\vec{a}| = 1$ ise $\vec{a}$ vektörü birim vektördür. Eğer $\vec{a} \neq \vec{0}$ herhangi bir vektör ise,

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a}$$

ile belirli $\vec{a}_0$ vektörüne $\vec{a}$ yönündeki birim vektör denir

5.2. Örnek

$\vec{a} = (1\,,\,-3)$ ve $\vec{b} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vektörleri birim vektör müdür? Eğer değilse, bu vektörlerle aynı yöne sahip birim vektörleri bulunuz.

Çözüm

$\vec{a} = (1\,,\,-3)$ vektörü için,

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

olduğundan birim vektör değildir. $\vec{a}$ vektörü yönündeki birim vektör

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1\,,\,-3) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\,,\,-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

dir.

$\vec{b} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vektörü,

$$|\vec{b}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

olduğundan birim vektördür.

X- ve Y- koordinat eksenleri üzerinde ve pozitif yönde, $\vec{e}_1 = (1\,,\,0)$ ve $\vec{e}_2 = (0\,,\,1)$ şeklinde gösterilen birim vektörlerden yararlanarak düzlemde alınan herhangi bir $\vec{a} = (a_1\,,\,a_2)$ vektörünü

$$\begin{aligned}\vec{a} = (a_1\,,\,a_2) &= (a_1\,,\,0) + (0\,,\,a_2)\\ &= a_1(1\,,\,0) + a_2(0\,,\,1)\\ &= a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2\end{aligned}$$

şeklinde tek türlü yazabiliriz.

Örneğin, $\vec{a} = (4\ ,\ \text{-}3)$ vektörünü $\vec{e_1}$ ve $\vec{e_2}$ cinsinden

$$\begin{aligned}\vec{a} = (4\ ,\ \text{-}3) &= (4\ ,\ 0) + (0\ ,\ \text{-}3)\\ &= 4(1\ ,\ 0) + (\text{-}3)\ (0\ ,\ 1)\\ &= 4\vec{e_1} + (\text{-}3)\,\vec{e_2}\end{aligned}$$

yazılabilir.

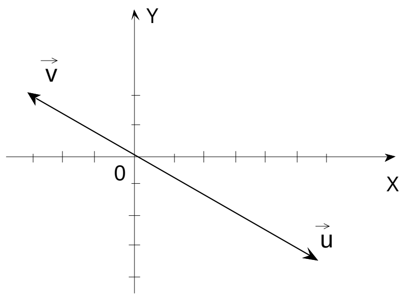
6. İki Vektörün Doğrusal Bağımlılığı

Düzlemde $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ gibi iki vektör alalım. Eğer $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$ olacak şekilde $\lambda \neq 0$ sayısı varsa $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine doğrusal bağımlıdır denir.

Örneğin, $\vec{u} = (6\ ,\ \text{-}4)$ ve $\vec{v} = (\text{-}3\ ,\ 2)$ vektörleri için

$$\vec{u} = (6\ ,\ \text{-}4) = \text{-}2(\text{-}3\ ,\ 2) = \text{-}2\vec{v}$$
$$\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$$

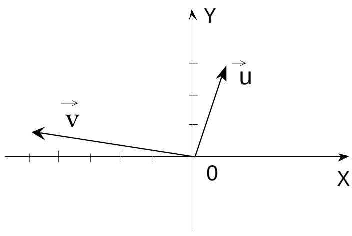
olduğundan $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri doğrusal bağımlıdır.



Şekil 3.11

Düzlemde doğrultuları aynı olan iki vektör Şekil 3.11'den görüldüğü gibi doğrusal bağımlıdır.

Şimdi $\vec{u} = (1\ ,\ 3)$ ve $\vec{v} = (\text{-}5\ ,\ 1)$ vektörleri için

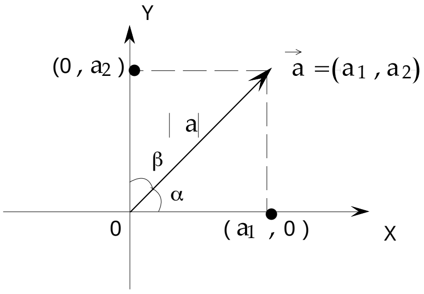


Şekil 3.12

Şekil 3.12'ye dikkat edilecek olursa, bu iki vektörün doğrultuları aynı değildir. $\vec{u}$ vektörü $\vec{v}$ vektörünün belli bir katı olarak yazılamaz. İşte, bu şekildeki $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine doğrusal bağımsız vektörler denir.

7. Bir Vektörün Doğrultu Kosinüsleri

Bir vektörün X- ve Y- eksenleri ile yaptığı açıların kosinüslerine o vektörün doğrultu kosinüsleri denir.



Şekil 3.13

Herhangi $\vec{a} = (a_1 , a_2)$ vektörünü alalım. Bu vektörün uzunluğ

$$r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

ve koordinat eksenleriyle yaptığı açılar sırasıyla α , β olsun. Bu açılara $\vec{a}$ vektörünün doğrultu açıları denir.

Şekil 3.13'den

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{r} \quad \text{ve} \quad \cos\beta = \frac{a_2}{r}$$

olarak $\vec{a}$ nın doğrultu kosinüsleri bulunur. Buradan $a_1 = r \cos\alpha$, $a_2 = r \cos\beta$ olduğundan $\vec{a} = (r \cos\alpha ,\ r \cos\beta)$ şeklinde yazılır. Doğrultu kosinüslerinin karelerinin toplamı ise

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{a_1^2}{r^2} + \frac{a_2^2}{r^2}$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

dir.

Örneğin $\vec{a} = (-4 , 3)$ vektörünün doğrultu kosinüsler

$$\cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{-4}{5}$$

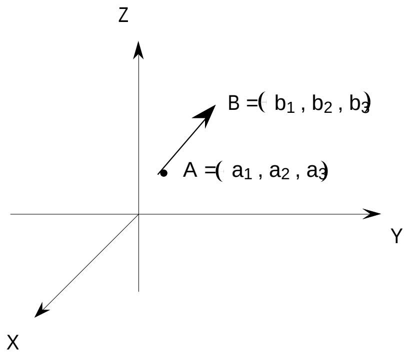
$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$$

dir.

8. Uzayda Vektörler

Uzayda vektörler, düzlemde olduğu gibi tanımlanır. $A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ noktaları ile $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasına karşılık $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ sıralı üçlüsü karşılık getirilir. Bu sıralı üçlüye birden fazla yönlü doğru parçası karşılık geldiğinden, bu eşleme 1 - 1 değildir.

Düzlemdekine benzer olarak, uzayda yönlü doğru parçalarının oluşturduğu bir kümede $\cong$ bağıntısı (düzlem için tanımlanan bağıntının uzaya doğal aktarılışı) tanımlanır. Bu bağıntı bir denklik bağıntısı olup, bunun oluşturduğu denklik sınıflarının herbirine uzayda bir vektör denir.



Şekil 3.14

$(b_1 - a_1, b_2 - a_2 - b_3 - a_3)$ sıralı üçlüsüne $\overrightarrow{AB}$ vektörünün koordinatları denir.

8.1. Örnek

$A = (1, -1, 0)$, $B = (4, 2, 1)$, $C = (0, 2, 3)$ noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ aynı vektörü temsil edecek şekilde D noktasını bulunuz.

Çözüm

$$\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (4 - 1, 2 - (-1), 1 - 0) = (d_1 - 0, d_2 - 2, d_3 - 3)$$
$$(3, 3, 1) = (d_1, d_2 - 2, d_3 - 3)$$
$$3 = d_1$$
$$3 = d_2 - 2 \Rightarrow 5 = d_2$$
$$1 = d_3 - 3 \Rightarrow 4 = d_3$$
$$D = (d_1, d_2, d_3) = (3, 5, 4)$$

Uzayda, iki vektörün toplamı, bir vektörün bir gerçel sayı ile çarpımı, bir vektörün boyu ve birim vektörün tanımları düzlemdekine benzediğinden, bunlarla ilgili örnekler vermek yeterli olacaktır.

8.2. Örnek

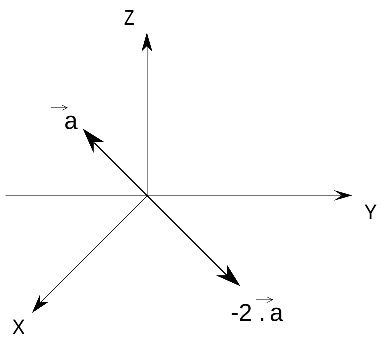
$\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (-1, 0, 5)$ ve $\vec{c} = (0, 4, -2)$ vektörlerinin toplamını bulunuz.

Çözüm

$$
\begin{aligned}
\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) &= (2, 3, -1) + [(-1, 0, 5) + (0, 4, -2)] \\
&= (2, 3, -1) + (-1 + 0, 0 + 4, 5 + (-2)) \\
&= (2, 3, -1) + (-1, 4, 3) \\
&= (2 + (-1), 3 + 4, -1 + 3) \\
&= (1, 7, 2)
\end{aligned}
$$

8.3. Örnek

$k = -2$ bir gerçel sayı ve $\vec{a} = (-2, -1, 4)$ vektörü veriliyor. Bu vektörün $k = -2$ gerçel sayısı ile çarpımını bulunuz.



Şekil 3.15

Çözüm

$$
\begin{aligned}
\vec{b} = k\vec{a} &= (-2)(-2, -1, 4) \\
&= (-2 . (-2), -2 . (-1), -2 . 4) \\
&= (4, 2, -8)
\end{aligned}
$$

8.4. Örnek

$\vec{a} = (2, -3, 1)$ vektörünün boyunu bulun

Çözüm

$$
\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}
$$

8.5. Örnek

$\vec{a} = (-3 , 0 , 2)$ vektörü birim vektör müdür? Eğer değilse $\vec{a}$ yönündeki birim vektörü bulunuz.

Çözüm

Bu vektörün boyu,

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2 + (2)^2} = \sqrt{9 + 0 + 4} = \sqrt{13}$$

olduğundan birim vektör değildir. $\vec{a}$ yönündeki birim vektör

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{13}}\,(-3 , 0 , 2) = \left(\frac{-3}{\sqrt{13}} , 0 , \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

8.6. Örnek

Uzayda, X- , Y- , Z- eksenleri üzerinde pozitif yönde, uzunlukları 1 olan $\vec{e}_1 = (1 , 0 , 0)$, $\vec{e}_2 = (0 , 1 , 0)$ ve $\vec{e}_3 = (0 , 0 , 1)$ vektörleri cinsinden $\vec{a} = (-5 , 3 , 0)$ vektörünü yazınız.

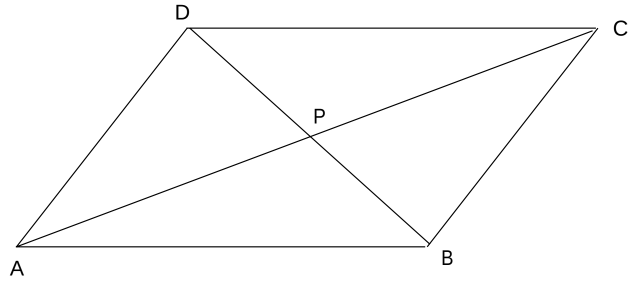
$$\begin{aligned}\vec{a} &= (-5 , 3 , 0) = (-5 , 0 , 0) + (0 , 3 , 0) + (0 , 0 , 0) \\ &= -5\,(1 , 0 , 0) + 3\,(0 , 1 , 0) + (0 , 0 , 0) \\ &= -5\,\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2\end{aligned}$$

bulunur.

9. Çözümlü Problemler

9.1. Bir ABCD paralel kenarında köşegenler birbirini kesim noktalarında iki eşit parçaya böldüklerini gösteriniz.

Çözüm



Şekil 3.16

ABCD paralel kenarında köşegenler P noktasında kesişsinler

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{AP} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$$

$$= \lambda\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \quad .... (1)$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \mu\left(\overrightarrow{BD}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB} + \mu\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB} + \mu\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= (1 - \mu)\,\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD} \quad .... (2)$$

(1) ve (2) den

$$(1 - \mu)\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AD} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \lambda\,\overrightarrow{AD}\ ,$$

$\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AD}$ vektörleri doğrusal bağımsız olduğundan

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \mu = \lambda \\ \mu = \lambda \end{array}\right\}\ \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

9.2. Bir ABC üçgeninin BC kenarının orta noktası H ise $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

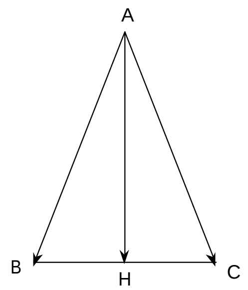
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} \\ \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} \end{array}\right\}\ 2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \left(\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BH}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

elde ederiz.

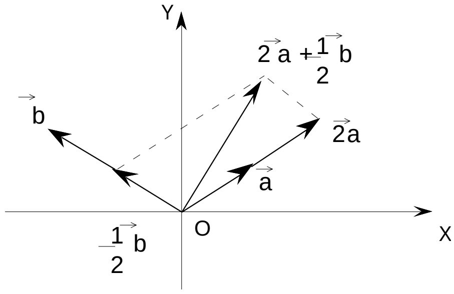


Şekil 3.17

9.3. $\vec{a} = 3\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ $\quad \vec{b} = -5\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ vektörleri veriliyor. $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ vektörünü bulunu:

Çözüm

$$2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = 2(3\,,2) + \frac{1}{2}(-5\,,2)$$
$$= (6\,,4) + \left(-\frac{5}{2}\,,1\right)$$
$$= \left(\frac{7}{2}\,,5\right)$$



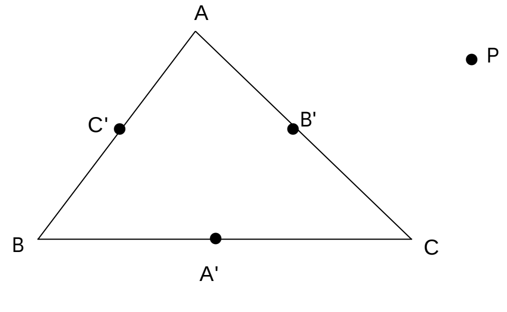
Şekil 3.18

9.4. Bir ABC üçgeninde A', B', C' noktaları Şekil 3.19'da belirtilen kenar orta noktaları ve P de düzlemde herhangi bir nokta olmak üzere,

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm



Şekil 3.19

Şekil 3.19 'dan

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{PC'} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'C}$$
$$= \overrightarrow{PB'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

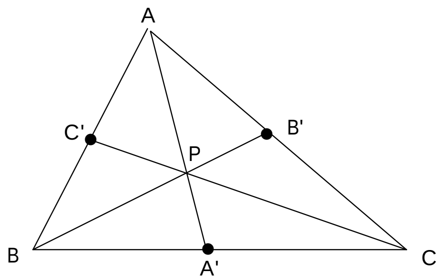
$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 0 \quad \text{olduğunda}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'} + \overrightarrow{PA'}$$

bulunur.

9.5. Bir üçgende kenarortayların bir noktada kesiştiğini gösteriniz.

Çözüm



Şekil 3.20

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA} + \lambda\left(\overrightarrow{AA'}\right)$$

$$= \overrightarrow{BA} + \lambda\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}\right)$$

$$= \overrightarrow{BA} + \lambda\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$$

$$= (\lambda - 1)\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{BC} \qquad \text{.......... 1}$$

Diğer taraftan $\overrightarrow{BP}$ vektörünü

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}$$

$$= \overrightarrow{BC} + \mu\left(\overrightarrow{CC'}\right)$$

$$= \overrightarrow{BC} + \mu\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC'}\right)$$

$$= \overrightarrow{BC} + \mu\left(\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)$$

$$= -\frac{\mu}{2}\overrightarrow{AB} + (1 - \mu)\overrightarrow{BC} \qquad \text{.......... 2}$$

yazabiliriz. (1) ve (2) nin sol tarafları eşit ve $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ vektörleri doğrusal bağımsız olduğundan

$$\lambda - 1 = -\frac{\mu}{2}$$

$$\frac{\lambda}{2} = 1 - \mu$$

dir.

$\frac{\lambda}{2} = 1 - \mu$ den $\lambda = 2 - 2\mu$ terimi $\lambda - 1 = -\frac{\mu}{2}$ de yerine konulursa,

$$2 - 2\mu - 1 = -\frac{\mu}{2}$$

$$1 - 2\mu = -\frac{\mu}{2}$$

$$2 - 4\mu = -\mu$$

$$2 = 3\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{2}{3}$$

ve

$$\lambda = 2 - 2\mu$$
$$= 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= 2 - \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

elde edilir.

Şimdi $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{B'C}$ olduğunu görelim.

İki vektörün doğrusal bağımlılığından

$$\delta\,\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BB'} \qquad \text{ve} \qquad (1) \qquad \text{der}$$

$$\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BB'} = -\frac{\delta}{3}\,\overrightarrow{AB} + \frac{\delta}{3}\,\overrightarrow{BC}$$

dir. $\overrightarrow{CB'}$ ve $\overrightarrow{CA}$ doğrusal bağımlı olduğundan

$$\overrightarrow{CA} = \eta\,\overrightarrow{CB'}$$

olacak şekilde $\eta \in$ **R** vardır.

$$\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}$$
$$= \overrightarrow{CB} - \frac{\delta}{3}\,\overrightarrow{AB} + \frac{\delta}{3}\,\overrightarrow{BC}$$
$$= \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\overrightarrow{CB} - \frac{\delta}{3}\,\overrightarrow{AB}$$

ve

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{CA} = \eta\,\overrightarrow{CB'}$$
$$= \eta\left[\left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\overrightarrow{CB} - \frac{\delta}{3}\,\overrightarrow{AB}\right]$$

$$\frac{1}{\eta}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{\eta}\overrightarrow{BA} = \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\overrightarrow{CB} - \frac{\delta}{3}\overrightarrow{AB}$$

$\frac{1}{\eta} = 1 - \frac{\delta}{3}$ ve $\frac{-1}{\eta} = -\frac{\delta}{3}$ olur.

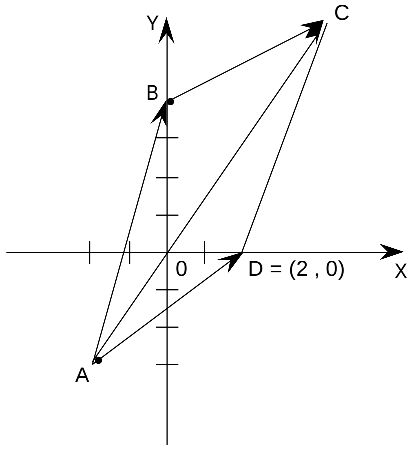
$3 = 3\eta - \delta\eta$ $\qquad 3 = \delta\eta$

$3 = 3\eta - 3$

$\eta = 2$

elde edilir. Bu da B' noktasının CA nın orta noktası olduğunu gösterir.

9.6. A = (-2 , -3) , B = (0 , 4) , D = (2 , 0) üç köşesi verilen paralel kenarın dördüncü köşesini bulunuz.



Şekil 3.21

Çözüm

C = (a , b) olsun.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$(2 , 7) + (4 , 3) = (a , b) - (-2 , -3)$$

$$(6 , 10) = (a + 2 , b + 3)$$

$6 = a + 2 \Rightarrow a = 4$

$10 = b + 3 \Rightarrow b = 7$

C = (a , b) = (4 , 7) dir.

Değerlendirme Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1. $\vec{a} = (1 , 0 , 3)$, $\vec{a} = (2 , -5 , 4)$ vektörleri veriliyor.
   $3\vec{a} - 2\vec{b}$ vektörünün koordinatları nedir?

   A. (7, 10 , 17)
   B. (3 , -5 , 7)
   C. (1 , 5 , -13)
   D. (-1 , 10 , 1)
   E. (-1 , 5 , -1)

2. $\vec{a} = (x , 4 , -3)$ vektörünün uzunluğu $\sqrt{61}$ birim olması için x ne olmalıdır?
   A. -3
   B. 3
   C. 4
   D. 5
   E. 6

3. $\vec{a} = (4 , 0 , -3)$ vektörü ile aynı yönde olan birim vektör aşağıdakilerden hangisidir.

   A. $\left(\frac{4}{5} , \frac{-3}{5} , 0\right)$
   B. $\left(\frac{-3}{5} , \frac{4}{5} , 0\right)$
   C. $\left(\frac{4}{5} , 0 , \frac{-3}{5}\right)$
   D. $\left(\frac{4}{5} , \frac{3}{5} , 0\right)$
   E. $\left(-\frac{4}{5} , 0 , \frac{3}{5}\right)$

4. $A = (-6 , 2)$ $B = (6 , 8)$ noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CB}$ koşuluna uyan
   noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

   A. $\left(3 , \frac{7}{2}\right)$
   B. $\left(3 , \frac{13}{2}\right)$
   C. $\left(-3 , \frac{13}{2}\right)$
   D. $\left(-\frac{7}{2} , -3\right)$
   E. $\left(\frac{7}{2} , 3\right)$

5. $\vec{u} = (x , 4 , y\text{-}2)$ ve $\vec{v} = (1 , 2 , 5)$ vektörlerinin paralel olması için, x ve y ne olmalıdır?

A. $x = 2$ $y = 12$

B. $x = 3$ $y = 17$

C. $x = 1$ $y = 7$

D. $x = \frac{1}{2}$ $y = 4$

E. $x = 0$ $y = 2$

6. $\vec{u} = -\vec{e_1} + 5\vec{e_2}$ ve $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$ olduğuna göre $\vec{u} - \vec{v}$ vektörünün uzunluğ nedir?

A. $\sqrt{5}$

B. 4

C. 5

D. $\sqrt{67}$

E. $\sqrt{73}$

7. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ uzayda herhangi vektörler ve $r , k \in \mathbf{R}$ ise aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A. $0 . \vec{a} = 0$

B. $r\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = r\vec{a} + r\vec{b}$

C. $r\left(k\vec{a}\right) = \left(rk\right)\vec{a}$

D. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

E. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

8. $A = (x , y\text{-}2 , x\text{+}2)$ $B = (3 , x\text{+}1 , z)$ ise AB doğru parçasının orta noktasının $(1 , -2 , 3)$ olması için x , y , z ne olmalıdır?

A. $x = 1$ $y = -2$ $z = 3$

B. $x = -1$ $y = -2$ $z = 5$

C. $x = -2$ $y = 1$ $z = 3$

D. $x = 2$ $y = 1$ $z = -3$

E. $x = -2$ $y = -1$ $z = -5$

9. Aşağıdaki vektörlerden hangisi birim vektördür?

A. $\left(1 , 1\right)$

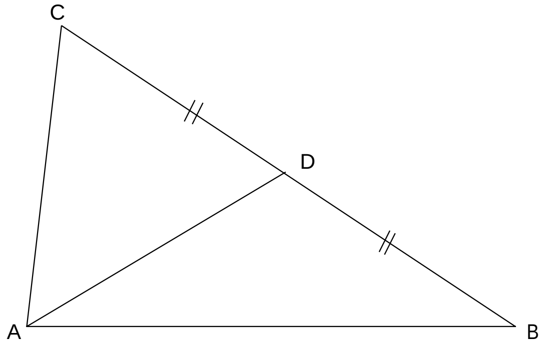
B. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

C. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

D. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , 3\right)$

E. $\left(0 , \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

10.



Yukarıdaki şekilde, ABC üçgeninde $|BD| = |CD|$ olduğuna göre $\overrightarrow{AD}$ vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

C. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}\right)$

D. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

E. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D 2. E 3. C 4. B 5. A 6. E 7. A 8. B 9. C 10. D