

1) a) A_n kümeleri, n tek ise $A_n = \left[0, 2 + \frac{1}{n}\right]$ ve n çift ise $A_n = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right]$ biçiminde

tanımlanıyor. $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = ?$

b) $A_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ olmak üzere $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = ?$

2) $X \neq \emptyset$ olmak üzere, Σ_1 ve Σ_2 aileleri X üzerinde iki σ -cebiri olsun. Kesişimlerinin de bir σ -cebiri olduğunu ispatlayınız.

3) a) $m^*(A) = 0$ ise A 'nın Lebesgue ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

b) Rasyonel sayılar kümesi Lebesgue ölçülebilir midir? Kısaca nedenini açıklayınız.

c) m^* ile gösterilen Lebesgue dış ölçüsü ile m ile gösterilen Lebesgue ölçüsü arasındaki fark nedir? Kısaca yazınız.

4) A Lebesgue ölçülebilir bir küme ve $m(A) < \infty$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$A \subseteq G$ ve $m^*(G - A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir G açık kümesinin var olduğunu ispatlayınız.

(İpucu: infimum tanımından)

5) a) Aşağıdaki f fonksiyonunun \mathbb{R} de Lebesgue ölçülebilir olduğunu gösteriniz:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

b) f fonksiyonu \mathbb{R} de hemen hemen her yerde sürekli midir? Neden?

Başarılar! Süre 90 dakikadır.

Yrd. Doç. Dr. Gülay İ. Telsiz K.

1.soru	2.soru	3.soru	4.soru	5.soru
15 puan	15 puan	30 puan	20 puan	20 puan