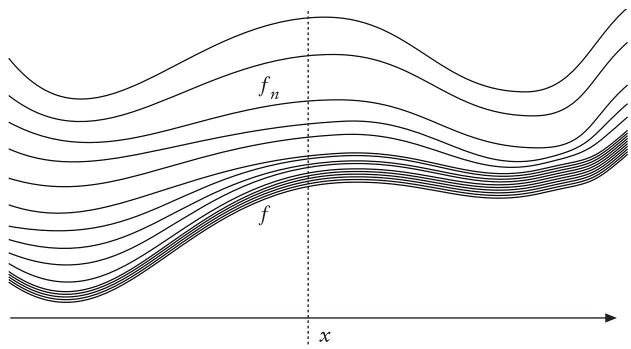
53. Fonksiyon Dizilerinin Noktasal Yakınsaması

X herhangi bir küme olsun. Mesela $X \subseteq \mathbb{R}$ olabilir (ama olmayabilir de). Her n doğal sayısı için bir $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. O zaman her $x \in X$ için ayrı bir $(f_n(x))_n$ sayı dizisi elde etmiş oluruz. Her $x \in X$ için bu $(f_n(x))_n$ sayı dizisinin bir limiti olabilir ya da olmayabilir. Diyelim her $x \in X$ için $(f_n(x))_n$ sayı dizisinin bir limiti var. x'e göre değişebilecek bu limite $f(x)$ diyelim. Böylece, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinden bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu elde ederiz. f fonksiyonunun



bu $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin limitini olduğunu söylemek herhalde kabul edilir bir tanım olur. Öyle diyeceğiz. Tek farkla ki, "limit" yerine "noktasal limit" sözünü kullanmayı yeğleyeceğiz çünkü ilerde fonksiyon dizileri için daha doğal bir limit kavramı bulacağız.

Biçimsel tanımı verelim: X herhangi bir küme olsun. Ve X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi verilmiş olsun. Eğer her $x \in X$ için $(f_n(x))_n$ sayı dizisinin bir limiti varsa, o zaman, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin, her $x \in X$ için,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

olarak tanımlanan $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ***noktasal yakınsadığı*** ve f'nin $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin (noktasal) limiti olduğu söylenir. Bu durumda,

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

ya da

$$f \overset{p}{=} \lim_{n \to \infty} f_n$$

yazılır. Eşitliğin üstündeki p, İngilizce noktasal anlamına gelen *pointwise* sözcüğünün p'sidir.

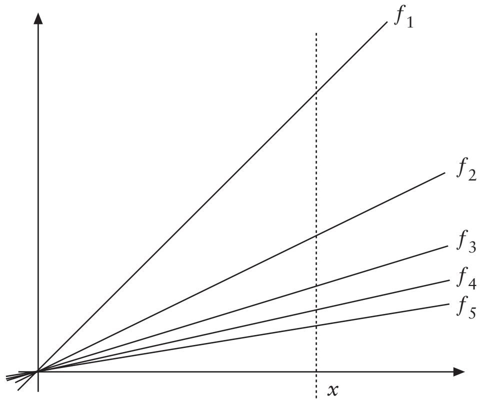
Bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin noktasal limiti varsa, bu limit elbette biriciktir.

Hemen birkaç örnek verelim. Örneklerimizde X hep $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olacak ama öyle olmak zorunda değil.

Örnek 53.1. $X = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x/n$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} x/n = 0$$

olur. Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin limiti sabit 0 fonksiyonuymuş. f_n fonksiyonlarının grafiği aşağıda. Giderek yataylaşıyorlar ve en sonunda $f(x) = 0$ fonksiyonuna yakınsıyorlar.



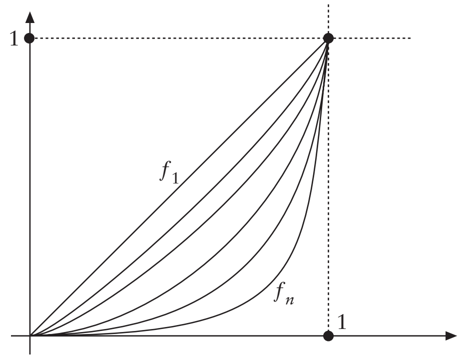
Örnek 53.2. $X = [0, 1]$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin limiti,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

formülüyle tanımlanan f fonksiyonudur.



Bu örnekte, f_n fonksiyonlarının her birinin sürekli ama f fonksiyonunun (1 noktasında) süreksiz olduğuna dikkatinizi çekeriz. Demek ki sürekli bir fonksiyon dizisinin noktasal limiti sürekli olmak zorunda olmayabilir. Bu da oldukça rahatsız edici bir durum.

Örnek 53.3. $X = \mathbb{R}$ ve

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

olsun. O zaman, exp fonksiyonun tanımına göre,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \exp x$$

olur. Benzer sonuç, gene tanımlardan dolayı sin ve cos fonksiyonları için de geçerlidir:

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!},$$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}.$$

Örnek 53.4. $f_n(x) = \dfrac{(2n^2+n-1)x+3n-5}{n^2}$ olsun.

O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{p}{=} 2x$$

olur.

Örnek 53.2'de sürekli bir fonksiyon dizisinin noktasal limitinin sürekli olmayabileceğini gördük. Daha önce de dediğimiz gibi bu oldukça rahatsız edici bir şey. İlerde fonksiyonların yakınsaması kavramıyla hafifçe oynayarak bu rahatsız edici şeyden kurtulacağız ve ***düzgün yakınsaklık*** olarak adlandırılan yepyeni bir yakınsama kavramında sürekli bir fonksiyon dizisinin limiti sürekli olacak.

Aşağıdaki teoremin kanıtı çok basittir, benzer eşitliklerin sayı dizileri için geçerli olmasından kaynaklanır.

Teorem. *X, herhangi bir küme olsun. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyon dizisi ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{p}{=} f \text{ ve } \lim_{n\to\infty} g_n \overset{p}{=} g$$

ise, $(f_n + g_n)_n$, $(rf_n)_n$ ve $(f_n g_n)_n$ fonksiyon dizilerinin de noktasal limitleri vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} (f_n + g_n) \overset{p}{=} f + g,$$
$$\lim_{n\to\infty} rf_n \overset{p}{=} rf$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} (f_n g_n) \overset{p}{=} fg$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca eğer her $x \in X$ için

$$g(x) \neq 0$$

ve

$$g_n(x) \neq 0$$

ise, $(f_n/g_n)_n$ *fonksiyon dizisinin de noktasal limiti vardır ve*

$$\lim_{n \to \infty} f_n/g_n \stackrel{p}{=} f/g$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Alıştırmalar

1. $X = [0, 1]$ ve $f_n(x) = nx(1-x)^n$ olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} f_n$ noktasal limitinin sabit 0 fonksiyonu olduğunu kanıtlayın. $f_n(1/n) > 1/6$ eşitsizliğini kanıtlayın.

2. $X = \mathbb{R}$ ve her $n < 0$ doğal sayısı için,

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{eğer } 0 < x < 1/n \text{ ise} \\ 1 & \text{yoksa} \end{cases}$$

olsun. O zaman,

$$\lim_{n \to \infty} f_n = 0$$

dır (yani limit, sabit 0 fonksiyonudur.)

3. $X = \mathbb{R}$ ve her $n < 0$ doğal sayısı için,

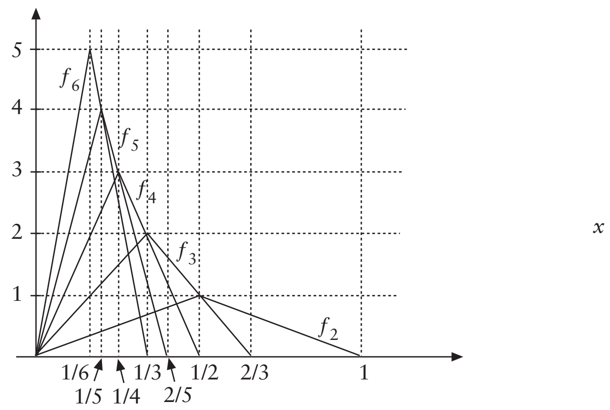
$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{eğer } 0 \leq x < 1/n \text{ ise} \\ 1 & \text{yoksa} \end{cases}$$

olsun. O zaman, $(f_n)_n$ dizisinin limiti var mıdır? Yoksa, X ne alınırsa dizinin bir limiti vardır?

4. $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ şöyle tanımlansın:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{eğer } 0 \leq x < 1/2n \text{ ise} \\ 2n - n^2x & \text{eğer } 0 \leq x < 1/2n \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } 0 \leq x < 1/2n \text{ ise} \end{cases}$$

Bu fonksiyonların grafiklerini çizin. (Aşağıda!) Fonksiyonların limitinin sabit 0 fonksiyonu olduğunu kanıtlayın.



Son alıştırmada da görüleceği üzere, fonksiyonların noktasal yakınsaması pek mutlu bir kavram değil: Maksimum değerleri sonsuza gidebilen bir fonksiyon dizisi noktasal olarak 0'a yakınsayabiliyor.

54. Fonksiyon Dizilerinin Düzgün Yakınsaması

Bir önceki bölümde bir fonksiyon dizisinin bir başka fonksiyona noktasal yakınsamasının ne demek olduğunu gördük. Tanımı anımsatalım çünkü bu tanımı hafifçe değiştirerek çok daha güçlü bir "fonksiyon dizisi yakınsaması" kavramı elde edeceğiz:

X herhangi bir küme ve X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi verilmiş olsun. Eğer her $x \in X$ için $(f_n(x))_n$ sayı dizisinin bir limiti varsa, o zaman, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin, her $x \in X$ için,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

olarak tanımlanan $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ***noktasal yakınsadığı*** ve f'nin $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin ***noktasal limiti*** olduğu söylenir. Bu durumda,

$$f \stackrel{p}{=} \lim_{n \to \infty} f_n$$

yazılır. Bir başka deyişle, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin limiti olan $\lim_{n \to \infty} f_n$ fonksiyonu, her $x \in X$ için,

$$(\lim_{n \to \infty} f_n)(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

olarak tanımlanmıştır.

Tanımı biraz daha açacak olursak, bir

$$(f_n : X \to \mathbb{R})_n$$

fonksiyon dizisinin bir

$$f : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna yakınsaması için, her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir N olmalı ki, her $n > N$ için,
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
olsun.

Bunu simgesel olarak yazalım:
$$f \overset{p}{=} \lim_{n \to \infty} f_n$$
eşitliği, aynen,
$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N\ (\forall n > N)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
anlamına gelir.

Buradaki N sayısı x'e ve ε'a göre değişir. Zaten yukardaki matematiksel formüldeki sıralamada da N sayısı
$$\text{“}(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)\text{”}$$
simgelerinden sonra gelir. Yani her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için, istenen koşulu sağlayan ayrı bir N olabilir. Bu bağımlılığı göstermek için bazen N yerine, $N_{\varepsilon,\, x}$ yazılır.

N'nin ε'a göre değişmesi olağan çünkü ne de olsa ε küçüldükçe
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
eşitsizliğini sağlamak, yani $f_n(x)$'nin $f(x)$'e ε kadar yakın olmasını sağlamak güçleşir: Genelde ε küçüldükçe bu eşitsizliğin sağlandığı n sayısını büyütmek gerekir. (Genellikle, sadece pek ender durumlarda N, ε'dan bağımsızdır.)

N'nin x'e göre değişmesi de olağan bulunabilir. Nitekim x değiştikçe
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
eşitsizliğinin sağlanması giderek gecikebilir. Öte yandan bazen de gecikmez, bazı durumlarda, hatta oldukça sık rastlanan bazı durumlarda, belli bir N'den büyük n sayıları için
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
eşitsizliği **her** $x \in X$ için sağlanır. Bu durumda
$$(f_n : X \to \mathbb{R})_n$$
fonksiyon dizisinin

$$f : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna düzgün yakınsadığı söylenir. Bu durumda,

$$\lim_{n \to \infty} f_n \stackrel{u}{=} f$$

yazılır ve $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir. (Eşitliğin üstündeki *u* harfi, İngilizce düzgün demek olan *uniform* sözcüğünün u'sudur.)

Düzgün yakınsaklığın biçimsel tanımı şöyle:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N\ (\forall x \in X)\ (\forall n > N)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Bu formülü bir önceki formülle karşılaştırmakta ve

"$\forall x \in X$"

simgelerinin nerden nereye geçtiğini gözlemlemekte yarar vardır.

Düzgün yakınsaklığı sözle ifade edelim: Eğer her $\varepsilon > 0$ için, her $n > N$ ve her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Düzgün yakınsaklığın noktasal yakınsaklıktan şu önemli ayrımı var. Düzgün yakınsaklıkta, $(f_n(x))_n$ dizileri $f(x)$ sayılarına **aynı hızla** yakınsarlar. Oysa noktasal yakınsaklıkta yakınsama hızı x'e göre değişebilir. Dolayısıyla düzgün yakınsaklık, noktasal yakınsaklıktan çok daha hoş ve çok daha yararlı bir kavramdır. Bunu yakın zamanda göreceğiz. Ayrıca noktasal yakınsaklıktan daha kuvvetli bir kavramdır, yani noktasal yakınsamak, düzgün yakınsaklıktan çok daha kolaydır: Bir fonksiyon dizisi düzgün yakınsaksa aynı zamanda noktasal yakınsaktır ama bunun tersi doğru değildir:

Teorem 54.1. *Eğer $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa noktasal da yakınsar.*

Kanıt: Bu kadar açıklamadan sonra bu teoremin ayrıca bir kanıta ihtiyacı olduğunu sanmıyoruz: Eğer bir N her x için işimize yarıyorsa, elbette her x için bu N işimize yarar! □

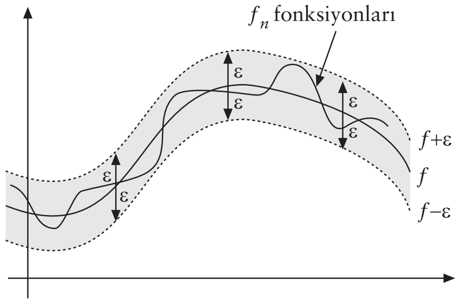
Düzgün yakınsaklı kavramını geometrik olarak da ifade edebiliriz ve böylece kavram sezgilerimize daha yatkın bir hale gelir. $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi f'ye düzgün yakınsasın. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. O zaman yeterince büyük n'ler ve her x için,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

yani

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bir başka deyişle, yeterince büyük n'ler için f_n fonksiyonları $f - \varepsilon$ ile $f + \varepsilon$ arasındadır. Şekil aşağıda.



Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f'ye düzgün yakınsaması için yeter ve gerek koşul, her $\varepsilon > 0$ için, f_n fonksiyonlarının bir zaman sonra $f - \varepsilon$ ile $f + \varepsilon$ şeridinin içine girmesidir.

Birazdan örnekler vereceğiz (geçen bölümün örneklerinin üstünden geçeceğiz) ama önce bunca açıklamadan sonra çok bariz olması gereken bir de şu teoremi aradan çıkaralım:

Teorem 54.2. *$Y \subseteq X$ iki küme olsun. $(f_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer $(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, o zaman $(f_{n|Y})_n$ fonksiyon dizisi $f_{|Y}$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.*

Kanıt: Eğer bir N her $x \in X$ için işimize yarıyorsa, elbette bu N her $x \in Y$ için de işimize yarar! □

Birazdan göreceğimiz üzere (örnekleri boldur zaten) bu teoremin tersi yanlıştır, yani $(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsasa ve $(f_{n|Y})_n$ fonksiyon dizisi $f_{|Y}$ fonksiyonuna düzgün yakınsasa ve hatta Y bir biçimde X'te "yoğun" olsa bile $(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsamayabilir.

Alıştırmalar

1. $X = Y \cup Z$ olsun. $(f_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer $(f_{n|Y})_n$ ve $(f_{n|Z})_n$ fonksiyon dizileri düzgün yakınsaksa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin de düzgün yakınsak olduğunu kanıtlayın.

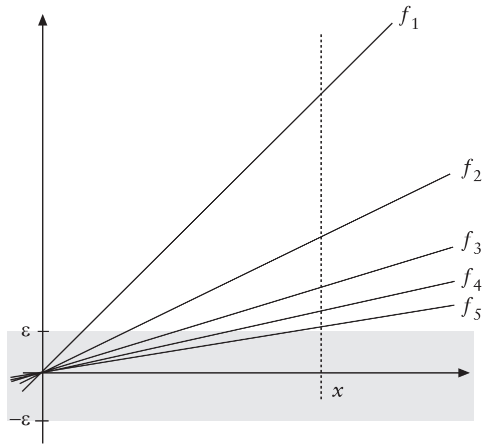
2. Eğer X sonluysa, noktasal yakınsak her fonksiyon dizisinin düzgün yakınsak olduğunu kanıtlayın.

Gelelim örneklere. Bir önceki bölümdeki noktasal yakınsaklıkların düzgün yakınsaklık olup olmadıklarını irdeleyeceğiz. Eğer dizi düzgün yakınsak değilse, fonksiyonların tanım kümesi olan X'in öyle (olabildiğince geniş) bir Y altkümesini bulacağız ki Y'ye kısıtlanmış fonksiyon dizisi düzgün yakınsak olsun.

Örnek 54.1. $X = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x/n$ olsun. Bir önceki bölümde bu dizinin noktasal limitinin sabit 0 fonksiyonu olduğunu gördük. Bakalım düzgün yakınsaklık var mı?

Teorem 54.1'e göre fonksiyon dizisi ancak sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsayabilir. Zaten bu bir sonraki sayfada çizdiğimiz fonksiyon grafiklerinden de bariz biçimde görülüyor.

Eğer f_n fonksiyonlarının grafiklerine bakarsak düzgün yakınsaklığın olmadığını hissederiz: Belli ki x büyüdükçe $(f_n(x))_n$ yani $(x/n)_n$ dizisi 0'a yakınsamakta gecikiyor, ya da şöyle açıklayalım: f_n'ler hiçbir zaman sabit 0 fonksiyonunun $(-\varepsilon, \varepsilon)$ şeridine girmiyorlar. Bunu biçimsel olarak kanıtlayalım.



$$\varepsilon = 1$$

olsun. Diyelim öyle bir N var ki her $n > N$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon = 1,$$

yani

$$|x/n| < 1,$$

yani

$$|x| < n.$$

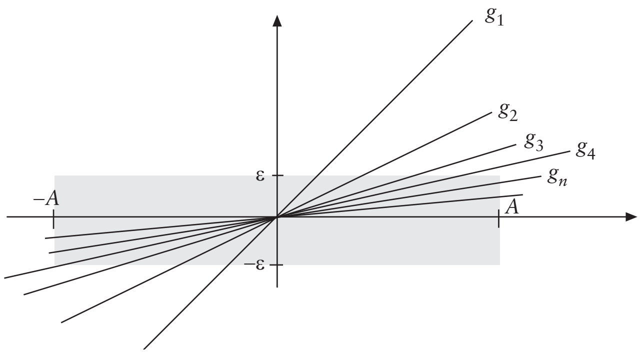
Ama bu son eşitlikten daha saçma bir şey olamaz! Her x sayısının mutlak değeri elbette n'den küçük değildir. Demek ki düzgün yakınsaklık yok.

Ama şimdi f_n fonksiyonlarını sınırlı bir aralığa kısıtlayalım, diyelim bir $A > 0$ için, fonksiyonları $[-A, A]$ aralığına kısıtladık. Bakalım neler olacak... Bu fonksiyonlara g_n diyelim:

$$g_n = f_{n|[-A,\, A]}.$$

$(g_n)_n$ fonksiyonlar dizisinin sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayacağız.

Bunun böyle olduğu yukardaki şekilden de anlaşılıyor: Fonksiyonlar sadece $[-A, A]$ aralığına kısıtlandığından (A çok büyük bile olsa), g_n fonksiyonları (n yeterince büyük alındığında) $(-\varepsilon, \varepsilon)$ şeridine girerler. Bunu biçimsel olarak kanıtlayalım şimdi.



$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir N bulacağız ki, her $n > N$ ve her $x \in [-A, A]$ için,

$$|g_n(x) - 0| < \varepsilon,$$

yani

$$|x/n| < \varepsilon,$$

yani

$$|x|/\varepsilon < n$$

olacak. Bu son eşitsizliğin yeterince büyük n'ler için sağlandığını görmek pek o kadar zor değil, çünkü her $x \in [-A, A]$ için $|x| < A$, dolayısıyla eğer n'yi $n > A/\varepsilon$ olacak biçimde alırsak istediğimizi elde ederiz.

Daha da biçimsel kanıtı verelim: $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$N > A/\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir doğal sayı seçelim, örneğin,

$$N = [A/\varepsilon] + 1$$

olsun. O zaman her $n > N$ için,

$$|g_n(x) - 0| = |x/n| = |x|/n < |x|/N \leq A/N < \varepsilon$$

olur. Kanıtımız tamamlanmıştır.

Teorem 54.2'den dolayı f_n fonksiyonlarının $\mathbb{R}$'nin herhangi sınırlı bir altkümesine kısıtlanmışları sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsar.

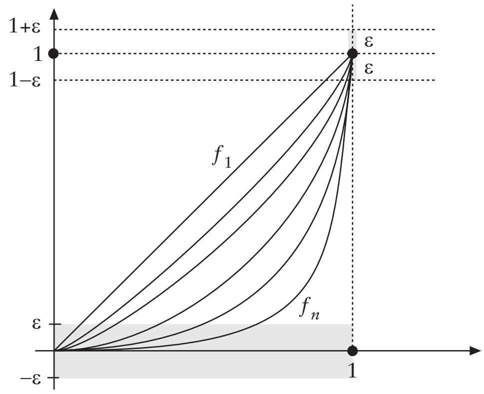
Örnek 54.2. $X = [0, 1]$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin noktasal limiti,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

formülüyle tanımlanan f fonksiyonudur. Dolayısıyla $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi ancak bu f fonksiyonuna düzgün yakınsayabilir.



Yakınsaklığın düzgün olmadığını kanıtlayacağız. Yukardaki şekilden de bunun anlaşılması lazım. Belli ki 1 mızıkçılık yapıyor. f'nin 1'de aldığı 1 değeri yüzünden, küçük bir ε için, f_n fonksiyonları hiçbir zaman f merkezli ε kalınlığındaki şeride girmiyor. Bunu biçimsel olarak kanıtlayalım.

Bu sefer $\varepsilon = 1/2$ alalım. Diyelim öyle bir N var ki her $n > N$ ve her $x \in [0, 1]$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = 1/2$$

olsun. O zaman her $n > N$ ve her $x \in [0, 1)$ için de,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = 1/2,$$

yani

$$x^n = |x^n| < 1/2$$

olur. Bunun özel bir hali olarak, her $x \in [0, 1)$ için

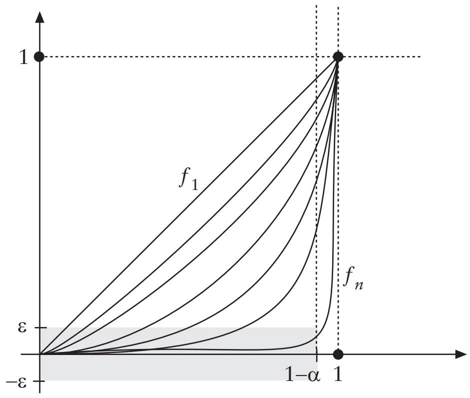
$$x^{N+1} < 1/2$$

olur. Ama bu doğru olamaz, çünkü $g(x) = x^{N+1}$ fonksiyonu süreklidir ve x, (soldan) 1'e doğru giderken bu fonksiyonun limiti 1'dir:

$$\lim_{x \to 1^-} x^{N+1} = 1.$$

Dolayısıyla 1'e yeterince yakın x'ler için x^{N+1} sayısı 1'e çok yakın olmalı, yani 1/2'yi aşmalı. Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi düzgün yakınsayamaz.

Şimdi bir önceki örnekte yaptığımıza çok benzer bir şey yapalım. Çok küçük ama pozitif bir α sayısı seçelim ve fonksiyonlarımızı $[0, 1]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye yollayacağımıza, $[0, 1 - \alpha]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye yollayalım. Bu durumda fonksiyon dizisinin sabit 0 dizisine düzgün yakınsadığını kanıtlayabiliriz.



Bu, yukardaki şekilden de anlaşılıyor. $1 - \alpha < 1$ olduğundan, n'yi yeterince büyük seçersek, f_n fonksiyonları $(-\varepsilon, \varepsilon)$ şeridinin içine girerler.

Nitekim, $\varepsilon > 0$ olsun. Öyle bir N bulacağız ki her $n > N$ ve her $x \in [0, 1 - \alpha]$ için,

$$x^n = |f_n(x) - 0| < \varepsilon$$

olacak. $x^n \leq (1 - \alpha)^n$ olduğundan, her $n > N$ için

$$(1 - \alpha)^n < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlamak yeterli. Böyle bir N bulmak mümkün müdür? Evet! Çünkü $0 \leq 1 - \alpha < 1$ olduğundan,

$$\lim_{n \to \infty} (1 - \alpha)^n = 0$$

eşitliği geçerlidir, yani belli bir N'den sonra her n, $(1 - \alpha)^n < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlar.

Örnek 54.3. $X = \mathbb{R}$ ve

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

olsun. O zaman, exp fonksiyonun tanımına göre,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \exp x$$

olur. Demek ki,

$$\lim_{n \to \infty} f_n \overset{p}{=} \exp.$$

Peki düzgün yakınsaklık var mı? Yok! Nitekim eğer x'i pozitif alırsak,

$$\exp x - f_n(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \geq 0$$

olur ve $\varepsilon > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun, bu sayı x çok büyük alındığında ε'u aşar.

Öte yandan (daha önceki iki örnekte de olduğu gibi), eğer f_n fonksiyonlarını $\mathbb{R}$'nin sınırlı bir altkümesine kısıtlarsak, o zaman yakınsaklık düzgün olur.

Okurun bu aşamada bunu kanıtlamaya çalışmasında büyük yarar vardır. Bölüm 57'de kuvvet serileriyle ilgili çok daha genel bir sonuç kanıtlayacağımızdan, biz bunun kanıtını ileriye sarkıtıyoruz.

Alıştırmalar

1. Örnek 54.2'deki $(f_n)_n$ dizisinin $(0, 1)$ açık aralığında düzgün yakınsak olmadığını kanıtlayın.

2. Örnek 54.3'teki $(f_n)_n$ dizisinin sınırlı bir aralıkta exp fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

3. $f_n(x) = x^n/n$ olsun ve f_n'yi $[-1, 1]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon olarak görelim. $(f_n)_n$ dizisinin sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

4. $f_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin sabit 0 fonksiyonuna noktasal yakınsadığını ama düzgün yakınsamadığını kanıtlayın.

5. $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. $(f_n)_n$ dizisinin sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

6. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1+nx^2}$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. $(f_n)_n$ dizisinin sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

7. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f_n(x) = \frac{x^3}{1+nx^2}$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. $(f_n)_n$ dizisinin her sınırlı kümede düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

55. Düzgün Yakınsaklığın Düzgün Tanımı

Bir önceki bölümde bir fonksiyon dizisinin bir başka fonksiyona düzgün yakınsamasının ne demek olduğunu gördük. Bu bölümde aynı kavramın daha kullanışlı ve birçok anlamda daha doğru bir tanımını vereceğiz.

Önce düzgün yakınsaklığın tanımını anımsatalım: X herhangi bir küme ve X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\textit{her } n > N \textit{ ve her } x \in X \textit{ için}, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Bu tanımda,

$$\text{“}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\text{”}$$

eşitsizliği yerine

$$\text{“}|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon\text{”}$$

eşitsizliğini almak bir şey değiştirmez. Yani yukardaki tanımla şu tanım aynı anlama gelir: Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\textit{her } n > N \textit{ ve her } x \in X \textit{ için}, \ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Nitekim birinci tanımdaki koşul her $\varepsilon > 0$ için sağlanıyorsa, elbette ikinci tanımdaki koşul da her $\varepsilon > 0$ için sağlanır, çünkü ne de olsa

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

önermesi doğrudur. Şimdi ikinci tanımdaki koşulun her $\varepsilon > 0$ için sağlandığını varsayalım ve birinci tanımdaki koşulun her $\varepsilon > 0$ için sağlandığını kanıtlayalım. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. İkinci tanımı ε yerine $\varepsilon/2$'ye uygulayalım: her $n > N$ ve her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon/2$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N sayısı vardır. Bu N sayısı işimizi görür: Her $n > N$ ve her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon/2$$

eşitsizliği, dolayısıyla

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Kanıtımız bitmiştir.

Bu bölümde yapmak istediğimiz için ikinci tanım daha kullanışlı olacak. Bundan böyle ikinci tanımı kullanacağız.

Şimdi şu basit ama önemli gözlemi yapalım: Eğer her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

eşitsizliği geçerliyse, o zaman,

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \le \varepsilon$$

eşitsizliği de geçerlidir. Ve bunun tam tersi de doğrudur: Eğer bir n için,

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \le \varepsilon$$

eşitsizliği geçerliyse, her $x \in X$ için

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla düzgün yakınsaklığın tanımını şöyle de verebiliriz: Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\textit{her } n > N \textit{ için } \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \le \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Şimdi,

$$\|f_n - f\| = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\}$$

tanımını yapalım ve düzgün yakınsaklığın son tanımındaki

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\}$$

sayısı yerine $||f_n - f||$ sembolizmini kullanalım. O zaman düzgün yakınsaklığın tanımı şu şekle dönüşür: Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\textit{her } n > N \textit{ için } ||f_n - f|| \leq \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Elde etmek istediğimiz tanıma adım adım yaklaşıyoruz... Normlara uymak için ufak bir değişiklik daha yapalım. Aynen birinci sütunda ta en başta yaptığımız gibi $||f_n - f|| \leq \varepsilon$" yerine $||f_n - f|| < \varepsilon$" alabiliriz. İşte tanımın sondan bir önceki hali: Eğer her $\varepsilon > 0$ için, her $n > N$ için,

$$||f_n - f|| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Bu son koşulun ne dediğinin farkına vardınız mı? Bu koşul aynen,

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

diyor! Tek bir farkla ki $||f_n - f||$'ler illa sayı olmak zorunda değiller, ∞ da olabilirler. Eğer sonsuz tane n için $||f_n - f||$'ler ∞ oluyorsa, o zaman bunların limiti 0 olamaz ve düzgün yakınsaklık yoktur. Eğer en fazla sonlu tane n için $||f_n - f||$'ler ∞ oluyorsa, o zaman $||f_n - f||$'ler arasından sonsuz olanlarını çıkarıp geri kalan sayı dizisinin yakınsaklığına bakabiliriz.

Şimdi tanımın son halini yazabiliriz:

Tanım: *X herhangi bir küme ve X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi verilmiş olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

*ise, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna **düzgün yakınsadığı** söylenir.*

Son iki bölümde işlediğimiz örnekleri bu yeni tanım ışığında tekrar ele alalım.

Örnek 55.1. $X = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x/n$ olsun. Örnek 54.1'de bu dizinin noktasal limitinin sabit 0 fonksiyonu olduğunu ama dizinin düzgün yakınsak olmadığını gördük. Düzgün yakınsamanın olmadığını $\|f_n - 0\|$ sayılarını hesaplayarak görelim:

$$\begin{aligned}\|f_n - 0\| &= \sup\{|x/n - 0| : x \in \mathbb{R}\}\\ &= \sup\{|x|/n : x \in \mathbb{R}\} = \infty.\end{aligned}$$

Demek ki $(\|f_n - 0\|)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyor, hatta bir sayı dizisi bile değil. Dolayısıyla $(f_n)_n$ dizisi 0'a (ya da başka bir fonksiyona) düzgün yakınsayamaz.

Şimdi f_n fonksiyonlarını bir $A > 0$ için, $[-A, A]$ aralığına. Bu fonksiyonlara g_n diyelim:

$$g_n = f_{n|[-A,\, A]}.$$

Bu durumda $(g_n)_n$ dizisinin sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsar, nitekim,

$$\begin{aligned}0 \le \|g_n - 0\| &= \sup\{|x/n - 0| : x \in [-A, A]\}\\ &= \sup\{|x|/n : x \in [-A, A]\} \le A/n\end{aligned}$$

olduğundan, Sandviç Teoremi'ne göre

$$\lim_{n \to \infty} \|g_n - 0\| = 0$$

olur.

Örnek 55.2. $X = [0, 1]$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \ne 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin noktasal limiti,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \ne 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

formülüyle tanımlanan f fonksiyonudur. Geçen bölümde f'nin bu dizinin düzgün limiti olmadığını kanıtlamıştık. Aynı şeyi

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|$$

limitini hesaplayarak gösterelim. Tanım kümesini, $[0, 1]$ yerine $[0, 1)$ alıp düzgün yakınsaklığın olmadığını göstersek de olur (bkz. Teorem 54.2). O zaman, $(f_n)_n$ dizisinin noktasal limiti sabit 0 fonksiyonu olur ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|$$

limitinin olmadığını ya da olsa bile bu limitin 0 olmadığını kanıtlamamız gerekir. Nitekim,

$$\begin{aligned}\|f_n - 0\| &= \sup\{|x^n - 0| : x \in [0, 1)\}\\ &= \sup\{|x|^n : x \in [0, 1)\} = 1\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\| = 1 \neq 0$$

olur ve $(f_n)_n$ dizisi sabit 0 dizisine düzgün yakınsamaz.

Şimdi çok küçük ama pozitif bir α sayısı seçelim ve fonksiyonlarımızı $[0, 1]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye yollayacağımıza, $[0, 1-\alpha]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye yollayalım. Bu durumda fonksiyon dizisinin sabit 0 dizisine düzgün yakınsadığını kanıtlayabiliriz:

$$\begin{aligned}\|f_n - 0\| &= \sup\{|x^n - 0| : x \in [0, 1-\alpha]\}\\ &= \sup\{|x|^n : x \in [0, 1-\alpha]\}\\ &= (1-\alpha)^n\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\| = \lim_{n\to\infty} (1-\alpha)^n = 0$$

olur ve bu sefer $(f_n)_n$ dizisi sabit 0 dizisine düzgün yakınsar.

Örnek 55.3. $X = \mathbb{R}$ ve

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

olsun. O zaman, exp fonksiyonun tanımına göre,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \exp x$$

olur. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{p}{=} \exp.$$

Düzgün yakınsaklığın olmadığını göstermiştik. Bir daha gösterelim:

$$\begin{aligned}
\|f_n - \exp\| &= \sup\{|f_n(x) - \exp x| : x \in \mathbb{R}\} \\
&= \sup\left\{\left|\sum\nolimits_{m=n+1}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\right| : x \in \mathbb{R}\right\} \\
&\geq \sup\left\{\sum\nolimits_{m=n+1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} : x \in \mathbb{R}^{\geq 0}\right\} \\
&\geq \sup\left\{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : x \in \mathbb{R}\right\} = \infty.
\end{aligned}$$

Gösterdik!