

MAT313 METRİK UZAYLAR
YARIYIL SONU SINAVI SORULARI

11.08.2017

1) (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \notin \bar{A}$ ise (yani x , A kümesinin kapanışının bir elemanı değilse) $x \in (X \setminus A)^\circ$ olduğunu gösteriniz.

2) \mathbb{R}^2 kümesi $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p}$ biçiminde tanımlanan d metriği ile bir metrik uzaydır. Bu metrik uzayın “tam” olduğunu gösteriniz.

3) \mathbb{R} alışılmış (standart) metrik uzayında; $A = (-\infty, -1] \cup [1, 2)$ kümesini ele alalım.

a) A kümesinin kapalı ve sınırlı olmadığı için kompakt olmadığını biliyoruz. Demek ki bazı açık örtülerinin sonlu alt örtüsü yoktur. Böyle bir açık örtüsünü yazınız.

b) A kümesinin dizisel kompakt olmadığını gösteriniz.

4) a) X, Y iki metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve $A \subseteq X$ olsun. A kompakt ise $f(A)$ kümesinin de kompakt olduğunu gösteriniz.

İspat: $\{O_i : i \in I\}$, $f(A)$ kümesinin herhangi bir açık örtüsü olsun

b) Kompaktlıkla ilgili önemli bir teorem olan Arzela-Ascoli teoremindeki boşlukları doldurunuz: $E \subset C[a, b]$ olmak üzere E kompakt $\Leftrightarrow E$ kapalı, ve

5) \mathbb{R}^2 alışılmış (Euclid) metrik uzayında;

a) $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{x} \right\}$ kümesinin bağlantısız bir küme olduğunu gösteriniz.

b) E kümesi kompakt mıdır? Neden?

b) $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \neq 1 \}$ kümesi; yol bağlantılı mıdır? Bağlantılı mıdır? Neden?

Başarılar dilerim...

Yrd. Doç. Dr. Gülay İlona Telsiz Kayaoğlu

1	2	3	4	5
10	25	20	20	25