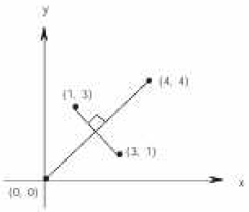
Örnek

Köşeleri $(0, 0)$, $(4, 4)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ noktaları olan elipsin denklemini yazınız, doğrultmanlarını ve dış merkezliğini hesaplayınız.

Çözüm

Düzlemde bu noktaları işaretlersek



Şekilden görüldüğü gibi elipsin büyük ekseni $(0, 0)$ noktasını $(4, 4)$ noktasına birleştiren doğru üzerindedir. Bu noktalar arasındaki uzaklık $2a$ idi. O halde

$$2a = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \quad \text{olur}$$

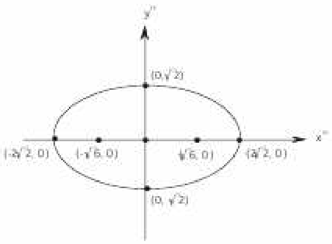
Benzer şekilde küçük eksen uzunluğu

$$2b = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} \quad \text{olur}$$

Öte yandan $c^2 = a^2 - b^2$ olduğu anımsanırsa:

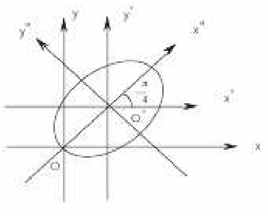
$$c = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6} \quad \text{olur}$$

O halde bu koşulları sağlayan merkezil elips



denklemi $\frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{2} = 1$ dir. Bu elipsin dış merkezliği $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve doğrultmanları $x'' = \frac{a}{e} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ve $x'' = -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ doğrularıdır. Şimdi düzlem $\frac{\pi}{4}$ kadar dönme verip ve $(2, 2)$ ötelemesi yaparsak elde edilen merkezil elipsin görüntüsü istenen elipstir.

Aşağıdaki şekilde belirtildiği gibi



Önce $x''O'y''$ koordinat sisteminde denklemi

$\frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{2} = 1$ olan elipsi $x'Oy'$ koordinat sistemindeki denklemini yazalım:

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),\ y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \quad \left(\theta = \frac{\pi}{4} \text{ olduğunda}\right)$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')\right)^2}{8} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')\right)^2}{2} = 1$$

$$\frac{x'^2 + y'^2 + 2x'y'}{16} + \frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{4} = 1$$

$$5x'^2 + 5y'^2 - 6x'y' = 16 \quad \text{elde edilir.}$$

O' noktasının xOy sistemindeki koordinatları (2,2) olduğundan

$x' = x - 2 \,, \; y' = y - 2$ kullanılarak

$$5\,(x-2)^2 + 5\,(y-2)^2 - 6\,(x-2)(y-2) = 16$$
$$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 20x - 20y = 0$$

denklemi elde edilir.