

1) a) X, Y normlu uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda, T operatörü $x = \theta$ da sürekli ise sınırlıdır, ispatlayınız. (θ ; X in sıfır vektörü)

2) Bir X normlu uzayının duali X' nasıl tanımlanır? X' üzerinde norm nasıl tanımlanır? ℓ^1 normlu uzayının duali hangi uzaydır (küme ve normu yazınız)?

3) $C[0,1]$ sürekli fonksiyonlar kümesinin,

$$\|x\| = \max \{ |x(t)| : 0 \leq t \leq 1 \}$$

biçiminde tanımlanan norm ile birlikte bir normlu uzay olduğunu biliyoruz. Paralelkenar özdeşliğinden yararlanarak bu normlu uzayın bir iç çarpım uzayı olmadığını gösteriniz.

4) Aşağıda ifade edilen “RieszTeoremi”ndeki boşlukları doldurunuz:

H bir uzayı ve f , H üzerinde tanımlı ve bir fonksiyonel olsun, bu durumda her $x \in H$ için $f(x) = \dots\dots\dots$ olacak şekilde tek bir $z \in H$ vardır ve $\|f\| = \dots\dots\dots$ dur.

5) X bir iç çarpım uzayı ve $M \neq \emptyset$, $M \subset X$ olsun; $\{x_n\} \subset M^\perp$ ve $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x$ ise $x \in M^\perp$ olduğunu (yani M^\perp nin kapalı olduğunu) gösteriniz. (M^\perp ; M nin ortogonal tümleyeni)

6) a) $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ lineer operatörü, $x = \{x_k\} \in \ell^2$ olmak üzere, $T(x) = \{0, x_1, 0, x_2, \dots\}$ biçiminde tanımlanıyor. Bu durumda T nin T^* ile gösterilen Hilbert ek operatörünü bulunuz.

Hatırlatma: $x = \{x_k\}, y = \{y_k\} \in \ell^2$ için iç çarpım $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$

b) H bir Hilbert uzayı ve $S, T : H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatörler olsun, bu durumda her α, β skaleri için $(\alpha S + \beta T)^* = \bar{\alpha} S^* + \bar{\beta} T^*$ olduğunu gösteriniz.

SORU	1	2	3	4	5	6
PUAN	20	15	15	10	15	25