Taylor serisi

Taylor serisi adını İngiliz matematikçi Brook Taylor'dan almıştır. Eğer seri sıfır merkezli ise ($a = 0$), Taylor serisi daha basit bir biçime girer ve bu özel seriye İskoç matematikçi Colin Maclaurin'e istinaden *Maclaurin serisi* denir.

Tanım

Her dereceden türevli, gerçel ya da karmaşık bir $f(x)$ fonksiyonunun a gerçel ya da karmaşık bir sayı olmak üzere $(a - r, a + r)$ aralığındaki *Taylor serisi* şu şekilde tanımlanmıştır:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Maclaurin serisi

a=0 özel durumunda seri, *Maclaurin serisi* olarak adlandırılır:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Örnekler

$|x| < 1$ olmak üzere $(1 - x)^{-1}$ için Maclaurin serisi,

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ geometrik serisidir.

$(x)^{-1}$ fonksiyonunun a=1 değerindeki Taylor serisi de,

$1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots$ dir.

Yukarıdaki Maclaurin serisinin integralini alarak $-ln(1 - x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisini buluruz:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Ve $\ln(x)$ fonksiyonunun a=1 değerindeki Taylor serisi ise,

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots \text{ dir.}$$

e^x üstel fonksiyonu için Maclaurin serisi,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$ dir.

Kullanım Alanları

Taylor ve Maclaurin serileri, fonksiyonların verilen bir noktadaki sayısal değerlerini bulmak için kullanılabilirler. Buna ek olarak, türev ya da integral de işlemleri seriye açılıp daha kolay işlem yapılabimektedir.

Örnek

Örnek olarak, $e^{0,1}$ sayısının yaklaşık değerini Maclaurin serisinin yardımı ile hesaplayalım.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

ilk 4 terimi alarak hesaplayalım

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2!} + \frac{(0,1)^3}{3!} = 1,105166$$

Hesap makinesiyle $e^{0,1} \approx 1,10517$