

**MAT 110 SOYUT MATEMATİK II**  
**ÇALIŞMA SORULARI - 3**

**RASYONEL SAYILAR**

1) Rasyonel sayılarda tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerinin iyi tanımlı olduğunu (temsilci seçiminden bağımsız olduklarını) gösteriniz.

2)  $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$  olmak üzere aşağıdaki önermeleri ispatlayınız:

a)  $x \cdot 0_{\mathbb{Q}} = 0_{\mathbb{Q}}$

b)  $-x = (-1_{\mathbb{Q}}) \cdot x$

c)  $xw \in \mathbb{Q}^+$  ve  $w \in \mathbb{Q}^+$  ise  $x \in \mathbb{Q}^+$

d)  $zx > zy$  ve  $x > y$  ise  $z \in \mathbb{Q}^+$

3)  $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  olmak üzere  $x$  ve  $y$  elemanının çarpmaya göre tersini  $x^{-1}$  ve  $y^{-1}$  ile gösterelim. Buna göre aşağıdaki önermeleri ispatlayınız:

a)  $(x^{-1})^{-1} = x$

b)  $(xy)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$

c)  $x, y \in \mathbb{Q}^+$  ve  $x > y$  ise  $x^{-1} < y^{-1}$

4)  $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} \mid -x \in \mathbb{Q}^+\}$  biçiminde tanımlanıyor. Buna göre  $x, y \in \mathbb{Q}^+$  ve  $u, v \in \mathbb{Q}^-$  olmak üzere aşağıdaki önermeleri ispatlayınız:

a)  $x + y \in \mathbb{Q}^+$  ,  $uv \in \mathbb{Q}^+$

b)  $x - u \in \mathbb{Q}^-$  ,  $xu \in \mathbb{Q}^-$

c)  $x \cdot y^{-1} \in \mathbb{Q}^+$  ,  $u \cdot v^{-1} \in \mathbb{Q}^+$

5)  $x \in \mathbb{Q}$  olmak üzere  $x$  in mutlak değeri  $|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$  biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre aşağıdaki önermeleri ispatlayınız:

a) Her  $x \in \mathbb{Q}$  için  $|x| = |-x| \geq 0$

b) Her  $x, y \in \mathbb{Q}$  için  $|xy| = |x||y|$

6) Aşağıdaki dizilerde  $\varepsilon = 1/500$  için sıfır dizisi olma koşulunu sağlayan ( $n \geq N$  için  $|x_n| < \varepsilon$  olacak şekilde) birer  $N$  doğal sayısı bulunuz:

a)  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

b)  $\{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

7) Rasyonel Sayı dizileri ile ilgili aşağıdaki önermeleri ispatlayınız:

a)  $\{x_n\}$  ve  $\{y_n\}$  Cauchy dizileri ise  $\{x_n + y_n\}$  dizisi de bir Cauchy dizisidir.

b)  $\{x_n\}$  ve  $\{y_n\}$  iki sıfır dizisi ise  $\{x_n + y_n\}$  dizisi de bir sıfır dizisidir.

c) Her Cauchy dizisi sınırlıdır.

d)  $\{x_n\}$  bir Cauchy dizisi ve  $\{y_n\}$  bir sıfır dizisi ise  $\{x_n \cdot y_n\}$  dizisi de bir sıfır dizisidir.

e)  $\{x_n \cdot y_n\}$  bir sıfır dizisi ve  $\{y_n\}$  bir Cauchy dizisi ise  $\{x_n\}$  bir sıfır dizisi midir? Cevabınız evet ise ispatlayınız, hayır ise bir örnek veriniz.