

ÇALIŞMA SORULARI - 01

1) a) A_n kümeleri, n tek ise $A_n = \left[1, 2 - \frac{1}{n}\right]$ ve n çift ise $A_n = \left[-1, 1 + \frac{1}{n}\right]$ biçiminde

tanımlanıyor. $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = ?$

b) B_n kümeleri, n tek ise $B_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ ve n çift ise $B_n = \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ biçiminde

tanımlanıyor. $\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n = ?$

2) a) G açık bir küme, $A \subset G$, $B \cap G = \emptyset$ olan herhangi A, B kümeleri için;

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$$

olduğunu gösteriniz. İpucu: Açık kümeler Lebesgue ölçülebilirdir, $G \in \mathcal{M}$. Buradan hareketle, ölçülebilir küme tanımında $X = A \cup B$ alınız.

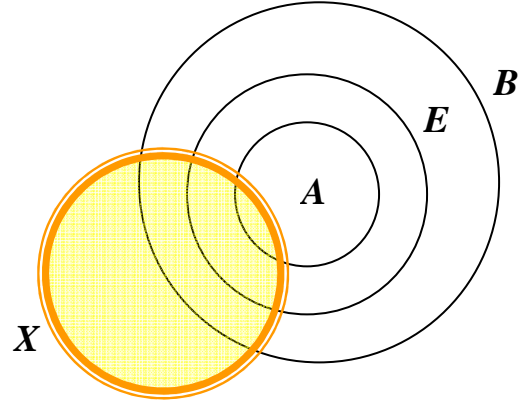
b) $A, B \in \mathcal{M}$ ve $m(B - A) = 0$ olsun. Bu durumda,

$A \subset E \subset B$ şartını sağlayan her E kümesi de ölçülebilirdir (yani $E \in \mathcal{M}$ dir). Gösteriniz.

İpucu:

$$X \cap E \subset X \cap B, \quad X \cap E^c \subset X \cap A^c$$

$$X \cap A^c = X - A = (X \cap (B - A)) \cup (X - B)$$



3) Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen tanım kümelerinde Lebesgue ölçülebilir olduğunu gösteriniz:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 3 \\ 2, & x = 3 \\ 5-x, & x > 3 \end{cases}$

c) $x \in \mathbb{Q}$ ise m ve n aralarında asal tam sayılar olmak üzere $x = \frac{m}{n}$ biçiminde yazılabilir.

Buradan hareketle f fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanıyor:

$$f(x) = \begin{cases} m+n, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$